ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Г.Н.Талызов, В.Г.Кульков, А.Л.Суркаев

# РУКОВОДСТВО ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

## ФИЗИКА. Часть 1

## МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие

Волгоград
1996

УДК 53(075.8)

Рецензент - канд. техн. наук, доц. В.В.Стасовская

Талызов Г.Н., Кульков В.Г., Суркаев А.Л. Руководство по решению задач. Физика. Часть 1. Механика и молекулярная физика: Учеб. пособие / ВолгГТУ, ВПИ, Волгоград, 1996.- 94с.

ISBN 5-230-03704-0

Рассматриваются вопросы, касающиеся подробного анализа решения основных типов задач в курсе физики. Первая часть содержит задачи механики и молекулярно-кинетической теории. Значительная часть материала является оригинальным. Изложение адаптировано к уровню студентов первого и второго курсов.

Рассчитано на студентов дневной и вечерней формы обучения высших технических учебных заведений.

Ил. 18. Табл. 1 Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Волгоградского государственного технического университета

ISBN 5-230-03704-0

## 1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Мир, в котором мы живем, необычайно огромен и разнообразен. Он состоит из колоссального количества различных материальных объектов от галактик и звёзд до элементарных частиц. Взаимодействие между ними приводит к настолько сложному и запутанному характеру их поведения, что, казалось бы, невозможно найти и следа каких-либо закономерностей. Однако, оказывается возможным среди этого хаоса выделить наиболее общие связи, присущие всем телам, их взаимодействиям. Одной из важнейших естественных наук, изучающей такие связи и их количественные характеристики, является физика. Она определяет такие понятия, как пространство, время, материя и другие. Являясь наиболее общей наукой о природе, она служит основой для многих других. Открытие и изучение новых физических процессов позволяет глубже понять сущность проходящих в природе явлений, ещё на шаг приблизиться к разгадке её тайн. Успехи в этом направлении приводят к созданию новых технологий в промышленности, совершенствованию уже существующих, непосредственно влияет на темпы научно-технического прогресса.

Одним из важнейших понятий, которым мы будем пользоваться далее, является физическая система. Она представляется в виде совокупности некоторых физических объектов, отделенных от всех других по каким-либо признакам. Иногда бывает так, что физической системой является всего лишь один такой объект. Например, системой можно считать некоторое количество газа, находящегося в баллоне, пружину с закрепленным на ее конце грузом, заряженную частицу, движущуюся во внешнем магнитном поле и т.д.

Для количественной характеристики физических объектов и процессов, в которых они участвуют, вводятся различные физические величины, позволяющие описать состояние и эволюцию системы. К ним относят массу, скорость движения, напряженность поля, величину заряда, температуру и многие другие. Совокупность физической системы и частично определенных параметров или величин составляет предмет исследования физической науки.

Система может находиться в статическом состоянии. При этом считается, что характеризующие его физические величины не изменяются. Иная ситуация соответствует изменяющимся во времени величинам. Такое состояние материи отвечает философской категории движения. Процесс изменения состояния физической системы называется физическим явлением. Обычно явление включает многие процессы, происходящие одновременно на микро- и макроуровнях. Это, например, испарение жидкости, намагничивание магнетиков, дифракция и интерференция света, механические деформации тел, сопровождающиеся выделением тепла, диффузионный массоперенос. Порой явления могут быть весьма сложными. Исследование таких физических явлений может привести либо к представлению их в виде совокупности более простых, либо к установлению новых, ранее неизвестных закономерностей.

Изучать различные явления можно, используя необходимые устойчивые связи между определенными физическими величинами. В этом состоит определение физического закона. Например, закон Кулона выражает связь между величинами двух точечных зарядов с силой их взаимодействия; закон Гука связывает относительную деформацию тела с механическим напряжением, действующим на него; закон преломления связывает направления падающего и преломленного светового луча с характеристикой среды - показателем преломления.

Применение физических законов требует соблюдения определенной осторожности, поскольку каждый из них справедлив лишь в определенных условиях, при несоблюдении которых он может оказаться слишком неточным или даже ошибочным. Скажем, законы классической механики с высокой точностью описывают поведение микроскопических тел, состоящих из большого количества микрочастиц. При переходе к описанию движения отдельных молекул или атомов возникают определенные затруднения, в результате чего описание становится менее точным. И уж совсем нельзя их применять для описания квантовых объектов, таких как электроны. Рассмотрение движения классических объектов со скоростями, сравнимыми со скоростью света, требует использования законов релятивистской теории. Поэтому, применяя определенный физический закон, всякий раз необходимо проверять условия задачи и следить за тем, чтобы они соответствовали ему. Поведение любой реальной системы физических объектов является очень сложным, поскольку факторов, влияющих на нее, довольно много, среди которых некоторые играют определяющую роль. Естественно, что невозможно учесть все факторы, так как одни из них слишком слабые, другие имеют случайный, хаотический характер. В связи с этим важно уметь отбрасывать их и оставлять для учета только наиболее значимые и существенные по величине. В результате, реальная физическая система с невообразимой сложностью ее поведения заменяется идеализированной, в определенном смысле абстрагированной ее моделью. Получив сведения о поведении такой модели, можно в дальнейшем по мере необходимости уточнять результаты учитывая менее существенные факторы, действующие внутри системы или вне ее. Таким образом, любая четко сформулированная физическая задача является идеализацией реальности. В физике принято пользоваться идеальными моделями объектов и процессов. Такими являются, например, материальная точка, идеальный газ, изотермический процесс и т.д. Необходимо уметь выделять главные стороны любого явления.

Изучение физической науки следует рассматривать как процесс, состоящий из трех этапов. Первый заключается в изучении теоретических сведений, в понимании и запоминании формул, знании способов их получения, уяснении основных физических законов. Второй этап предусматривает умение использовать полученные знания при решении конкретных задач. Хорошо известна ситуация, когда человек, казалось бы, хорошо знающий теорию, совсем не может решать задачи, то есть применять ее на практике. Решение конкретных физических задач является необходимой практической основой при изучении курса физики. Оно способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе, учит анализировать изучаемые явления, выделять главные факторы, обусловливающие то или иное явление, отвлекаясь от случайных и несущественных деталей. Благодаря этому, решение задач приближается к моделям научного физического исследования. Никакое количество материала, сколь большим бы оно ни было, не заменит настойчивых усилий, прилагаемых для решения физических задач, и тех навыков, которые с этим приходят. Третьим этапом можно считать умение проводить физический эксперимент и получать из него необходимые сведения. Эта цель достигается при выполнении лабораторных работ.

Физические задачи могут быть экспериментальными или теоретическими. Последние, в свою очередь, можно разделить на две категории - непоставленные и поставленные. Непоставленной называется задача, в которой не обеспечена совокупность необходимых исходных данных, за исключением табличных величин или же не проведена ее идеализация. В противном случае говорят о поставленной задаче, которые можно еще разделять и по роду рассматриваемых явлений.

Среди поставленных задач можно выделить четыре основных класса

1. Элементарные задачи. Сюда входят те задачи, для решения которых требуется использование одного физического закона.

2. Стандартные задачи. Они требуют использования нескольких обычных, часто используемых приемов решения и физических законов.

3. Нестандартные задачи. В этом случае кроме обычных законов и методов решение требует применения дополнительных нестандартных приемов, которые могут быть основаны, например, на свойствах симметрии или некоторых других отличительных свойствах системы.

4. Оригинальные задачи. Это задачи с определяющей ролью особых приемов решения, значительной степенью интуиции. Для решения таких задач нужны определенные навыки, достаточно широкий физический кругозор, умение проводить аналогию между явлениями из разных разделов физики и математики. Бывает так, что стандартная или нестандартная задача может иметь оригинальное решение.

Для того, чтобы научиться быстро и хорошо решать задачи, необходимо прежде всего владеть определенным объемом теоретического материала. С этой целью студент должен изучить соответствующие разделы конспектов лекций и учебника. Не следует ограничиваться использованием одного лишь лекционного материала. Наибольший объем знаний можно получить работая с учебниками, которых в настоящее время имеется достаточно много и написаны они на разном уровне. Лекция же выполняет лишь направляющую и разъясняющую главные моменты функцию. Она указывает направление в отборе материала для изучения.

Вторым фактором успешного решения задач является пользование соответствующими методиками. Недооценка его ведет к тому, что решение, происходящее на интуитивном уровне, не всегда является оптимальным. Отсюда и неизбежные недостатки: неполнота решения, большие затраты времени, частые затруднения, невозможность классификации задач и физических явлений, связанных с ними, невозможность прослеживания связей с другими задачами, отсутствие физических и математических аналогий. Все это указывает на необходимость владения общими методами решения задач.

Основными этапами решения любой физической задачи являются следующие: физический, математический и анализ решения.

Сущность физического этапа заключается в том, чтобы, используя условие задачи, определить, что и как нужно сделать, чтобы найти путь ее решения. Данный этап может включать в себя следующие действия:

1. Ознакомление с условием задачи.

2. Осмысление известных и искомых величин.

3. Изображение рисунка со всеми необходимыми обозначениями.

4. Определение качественной характеристики задачи. Установление ее сходства и отличия от других, сущности, рода явлений, к которому она относится.

5. Выбор физической системы.

6. Определение качественных характеристик системы. Пренебрежение несущественными деталями, идеализация физической системы.

7. Идеализация физических процессов.

8. Выбор способа описания процесса, например, выбор системы координат, использование симметрии, проведение аналогии с другими уже решенными задачами.

9. Установление количественных соотношений между физическими величинами. Использование необходимых физических законов, выбор системы единиц измерения.

10. Запись замкнутой системы уравнений. Большое значение на этом этапе имеют наблюдательность, умение абстрагироваться, навыки, приобретенные ранее в процессе решения других задач.

Итак, физический этап завершен, написаны все необходимые соотношения. Теперь необходимо, используя их, получить численный результат. Такую цель преследует математический этап решения физической задачи, который включает в себя следующие действия.

1. Выражение искомых величин через известные в общем виде. Здесь решающее значение приобретают математические методы и операции, такие, как решение системы линейных уравнений, решение дифференциальных уравнений, использование аппарата векторного анализа, дифференцирование и интегрирование функций, разложение в ряды, применение методов теории функций комплексного переменного и т.д.

2. Подстановка в формулы известных значений и получение численного результата. В зависимости от требуемой точности и имеющегося технического оснащения здесь могут использоваться математические таблицы, счетная линейка, калькулятор, электронно-вычислительные машины.

Последним этапом является анализ решения, который призван оценить удовлетворительность полученного результата. На этом этапе обычно осуществляются следующие действия.

1. Проверка размерности физической величины. Она должна совпадать с общепринятой в соответствующей системе единиц. Анализ размерности позволяет обнаружить грубые ошибки в решении. Например, недопустимо появление размерных величин в качестве аргументов таких функций, как логарифм, экспонента, тригонометрические функции и др. Недопустимы также операции сложения и вычитания величин, имеющих разные размерности.

2. Устранение математических результатов, являющихся абстракцией с точки зрения физики. К этой категории относятся бесконечно большие и малые величины, ступенчатые функции (типа функции Хевисайда), сингулярные функции (типа δ-функции Дирака).

3. Выбор одного физически возможного результата из нескольких математически дозволенных. Например, если при нахождении объема газа из решения квадратного уравнения получаются две величины, одна из которых положительная, а другая отрицательная, то вторую следует отбросить, как не имеющую физического смысла.

4. Оценка физической реальности результата. Например, следует признать нереальными такие результаты, когда скорость пули составляет несколько сантиметров в секунду, скорость частицы превышает скорость света, работа электрического тока в цепи батарейки равна нескольким мегаджоулям и др.

Каждый этап не обязательно должен включать все перечисленные действия. Их необходимость в значительной мере определяется спецификой и сложностью решаемой задачи.

## 2. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 2.1. Основные законы и формулы

Механика - раздел физики, изучающий механическое движение, т.е. изменение взаимного положения тел в пространстве с течением времени, и обусловливающие его взаимодействия тел.

Кинематика описывает механическое движение тел, не интересуясь его причиной.

Средняя и мгновенная скорости материальной точки:

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \langle V \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \bar{V} = \frac{dS}{dt},$$

где $\Delta\vec{r}$-элементарное перемещение точки за время $\Delta t$; $\vec{r}$ - радиус-вектор точки; $\Delta S$- путь, пройденный точкой за промежуток $\Delta t$.

Среднее и мгновенное ускорения материальной точки:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Полное ускорение при криволинейном движении:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a_n = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{dV}{dt}$ тангенциальное скорение; $a_n = \frac{V^2}{r}$ - нормальное ускорение; $r$ - радиус кривизны траектории.

Путь и скорость для равноускоренного движения.

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$V = V_0 + at ,$$

где $S_0$ и $V_0$ - начальные значения пути и скорости.

Угловая скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} .$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad \langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} .$$

Угол поворота и угловая скорость для равноускоренного вращательного движения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t ,$$

где $\varphi_0$ и $\omega_0$ - начальные угол поворота и угловая скорость.

Связь между линейными и угловыми величинами:

$$S = R\varphi \; ; \; V = R\omega \; ; \; a_\tau = R\varepsilon \; ; \; a_n = \omega^2 R ,$$

где R - расстояние от оси вращения.

## 2.2. Задачи

2.2.1 Зависимость пройденного телом пути S при прямолинейном движении от времени t дается уравнением:

$$S = At + Bt^3 + Ce^{\lambda t},$$

где A = 5м/с, B = 3м/с³, C = 2м, λ =1/2с⁻¹. Найти: 1) зависимость скорости V и ускорения a от времени; 2) на участке пути между моментами времени $t_1$=3с и $t_2$=6с определить среднюю скорость $\langle V_{12}\rangle$ и длину пути.

Дано: A = 5м/с, B = 3м/с³, C = 2м. λ =1/2с⁻¹; $t_1$=3с и $t_2$=6с

Найти: $\langle V_{12}\rangle$

Решение.

Будем считать тело материальной точкой. Начальный момент времени считаем равным нулю. При этом начальное значение S будет равно $S_0$= C. 1) Скорость определяется как первая производная пути по времени:

$$V = \frac{dS}{dt} = A + 3Bt^2 + \lambda ce^{\lambda t},$$

Ускорение равно второй производной пути по времени:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 6Bt + \lambda^2 ce^{\lambda t}.$$

2) Для моментов времени $t_1$ и $t_2$ найдем значения пройденного пути $S_1$ и $S_2$. Длина пути, пройденного между моментами времени $t_1$ и $t_2$, будет выражаться разностью $S_2 - S_1$:

$$S_{12} = S_2-S_1 = A(t_2-t_1)+B(t_2^3-t_1^3)+C\left(e^{\lambda t_2} - e^{\lambda t_1}\right). \quad (1)$$

Средняя скорость на этом участке равна длине пути $S_{12}$, де-

денной на интервал времени $t_2 - t_1$:

$$\langle V_{12} \rangle = \frac{S_{12}}{t_2 - t_1} . \qquad (2)$$

Подставив в выражение (1) и (2) численные значения величин, получим:

$$S_{12} = 613.2 \text{ м} \qquad \langle V_{12} \rangle = 204.4 \text{ м/с} .$$

2.2.2 Тело А начинает двигаться с начальной скоростью $V_o' = 4$м/с и движется с постоянным ускорением а. Через $\Delta t = 8$с после начала движения тела А из этой же точки начинает двигаться тело В с начальной скоростью $V_o'' = 16$м/с и движется с тем же ускорением а. Какова наибольшая величина ускорения а, при котором тело В сможет догнать тело А?

Дано: $V_o' = 4$м/с; $\Delta t = 8$с; $V_o'' = 16$м/с .

Найти: а

Решение.

За начало отсчета времени выберем момент начала движения тела В. Скорость тела А в этот момент имеет значение:

$$V_{oA}' = V_o' + a\Delta t .$$

Дальнейшее изменение скоростей обоих тел представляется выражениями:

$$V_A = V_{oA}' + at ;$$

$$V_B = V_o'' + at .$$

Тело В сможет догнать тело А, если его скорость всегда будет больше, т.е.

$$V_B - V_A > 0,$$

или иначе $\quad V_o'' > V_{oA}' = V_o' + a\Delta t$ .

Из этого соотношения находим условие для а:

$$a < \frac{V_0'' - V_0'}{\Delta t} .$$

Подставляя известные величины, находим максимальное значение ускорения:

$$a_{max} = 1.5 \text{ м/с}^2 .$$

2.2.2 Точка движется вдоль оси X со скоростью V, зависимость которой от времени описывается графиком (рис.1). Имея в виду что в момент t=0 координата точки x=0, начертить графики зависимостей от времени ускорения a, координаты X и пройденного пути S.

Решение.

Рассмотрим отдельно каждый из промежутков времени, различающихся по временной зависимости скорости.

0 < t < 1 Скорость растет линейно со временем, т.е. движение является равноускоренным с ускорением:

$$a_{01} = \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Координата X дается соотношением:

$$x = \frac{a_{01}t^2}{2} = \frac{t^2}{2} .$$

В этих выражениях подразумевается, что начальные координата и скорость равны нулю.

1 < t < 3 Здесь скорость V = const , поэтому $a_{13} = 0$

$$x = x(1) + V(1) \times t .$$

Здесь x(1), V(1) - координата и скорость в конце первого участка, т.е. x(1) = 1/2, V(1) = 1, тогда:

$$x = \frac{1}{2} + t .$$

На конце участка $x(3) = 2.5$

$3 < t < 6$ Скорость линейно падает с t, следовательно, движение является равнозамедленным. В этом случае:

$$a_{36} = \frac{V(6) - V(3)}{3} = -1$$

$$x = x(3) + V(3)t - \frac{at^2}{2} = \frac{5}{2} + t - \frac{t^2}{2} .$$

На конце участка $x(6) = 1$

$6 < t < 7$ Движение вновь является равноускоренным с ускорением

$$a_{67} = \frac{V(7) - V(6)}{1} = 2$$

$$x = x(6) + V(6)t + \frac{t^2}{a} = 1 - 2t + t^2 .$$

На конце участка $x(7) = 0$

$7 < t < 8$ Поскольку здесь $V = 0$, то и $a_{67}=0$ и $x = const = 0$ Графики функций $a(t)$ и $x(t)$ изображены на рис.1. Поскольку длина пути S во время движения всегда увеличивается, то ее график является неубывающим. Его легко получить из графика $x(t)$, если его убывающую часть, когда тело движется назад, считать новой длиной пути, отсчитанной от точки А. Сложив обе длины по модулю, получим график пути $S(t)$, который совпадает с $X(t)$ до точки А и симметричен $X(t)$ после точки А относительно линии, проходящей через неё горизонтально.

2.2.4 Ракета стартует с Земли вертикально вверх с ускорением $a = \alpha t^2$, где $\alpha = 2м/с^4$. На высоте $h_o = 1км$ от Земли двигатели ракеты выходят из строя. Через сколько времени (считая с момента выхода двигателей из строя) ракета упадет на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Начальная скорость ракеты $V_o = 0$.

Дано: $a = \alpha t^2$, $\alpha = 2м/с^4$, $h_o = 1км$, $V_o = 0$.

Найти: $t$

Решение.

Направим ось X вертикально вверх, начало отсчета координат совместим с точкой пересечения оси с земной поверхностью. Ракету считаем материальной точкой. Начальный момент времени совпадает со стартом. Интегрируя функцию ускорения по времени, находим зависимость скорости ракеты от $t$ :

$$V = \int \alpha t^2 dt = \frac{\alpha t^3}{3} \qquad (1)$$

Начальная скорость равна нулю. После повторного интегрирования находим закон изменения высоты подъема ракеты со временем:

$$h = \int \frac{\alpha t^3}{3} dt = \frac{\alpha t^4}{12}$$

Приравняв это выражение высоте, на которой отказали двигатели, найдем время их работы:

$$\frac{\alpha\, t_o^4}{12} = h_o \qquad t_o = \left(\frac{12\,h}{\alpha}\right)^{1/4} . \qquad (2)$$

В момент отказа скорость ракеты найдем из выражений (1) и (2):

$$V_o = \frac{\alpha\, t_o^3}{3} = \frac{\alpha^3 (12h)^{3/4}}{3} . \qquad (3)$$

Это значение является начальной скоростью при дальнейшем равноускоренном движении ракеты с ускорением - g. Запишем для этого случая закон изменения x(t) с учетом того, что теперь начальное значение координаты равно $h_o$.

$$x(t) = h_o + V_o t - \frac{gt^2}{2} \qquad (4)$$

В момент падения ракеты на Землю x=0. Приравняв выражение (4) нулю, решим получившееся квадратное уравнение:

$$gt^2 - 2V_o t - 2h_o = 0$$

$$t_1 = \frac{V_o}{g} + \frac{\sqrt{V_o^2 + 2h_o g}}{g} \qquad t_2 = \frac{V_o}{g} - \sqrt{\frac{V_o^2}{g^2} + 2\frac{h_o}{g}} \qquad (5)$$

Второй корень отрицателен, его отбрасываем, т.к. рассматриваемое движение происходит при $t > 0$. Подставим в (3) численные значения величин, получим значение $V_o$. Затем из (5) найдем значение $t_1$:

$$V_o = 454\text{м с} \qquad t_1 = 94\text{с}$$

2.2.5 Лодка движется перпендикулярно течению реки со скоростью относительно воды $V_1$=10км/ч. Точка причала оказалась на $l$=100м ниже по течению. Определить скорость течения $V_2$ и время, затраченное на переплывание реки t, если ее ширина d = 1км.

Дано: $V_1$ = 10км/ч, $l$ = 100м, d = 1км.

Найти: $V_2$, t

Решение.

Размеры лодки малы по сравнению с шириной реки, поэтому считаем ее материальной точкой. Скорость лодки относительно берега является векторной суммой скоростей $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

Вектор $\vec{V_1}$ перпендикулярен линии берега, а $\vec{V_2}$ параллелен ей. Поэтому величина $|V_2|$ не влияет на время переплывания реки. Это время равно:

$$t = \frac{d}{|V_1|} . \qquad (1)$$

За время $t$ лодку сносит вниз по течению на расстояние $l$. Следовательно, скорость течения равна:

$$V_2 = \frac{l}{t} = \frac{l \times |V_1|}{d} . \qquad (2)$$

Подставим в выражение (1) и (2) численные значения величин

$$|V_1| = 10 км/ч = \frac{100}{36} м/с; \; l = 100м, \; d = 1000м, \text{ получим}$$

$$t = 360 \text{ с} \qquad V_2 = 2.28 \text{ м/с} .$$

2.2.5 От бакена, который находится на середине широкой реки, отошли две лодки A и B. Обе лодки движутся по взаимно перпендикулярным прямым: лодка A вдоль реки, а лодка B - поперек. Удалившись на одинаковое расстояние от бакена, лодки вернулись затем обратно. Найти отношение времен движения лодок $t_A/t_B$, если скорость каждой лодки относительно воды в $\eta = 1.2$ раза больше скорости течения.

Дано: $\eta = 1.2$

Найти: $t_A/t_B$

Решение.

Обозначим величину скорости течения через V, а расстояние, на которое лодки удаляются от бакена, через S. Считается, что все скорости и расстояния измеряются относительно бакена. Скорость лодки A, когда она плывет по течению:

$$V_{1A} = (1 + \eta) V ; \qquad (1)$$

против течения:

$$V_{2A} = (n - 1)\,V\,. \tag{2}$$

При удалении ее на S от бакена и возвращении назад, лодка один раз плывет по течению, а другой - против. Полное время движения лодки А равно сумме соответствующих времен. С учетом (1) и (2) получаем:

$$t_A = \frac{S}{V_{1A}} + \frac{S}{V_{2A}} = \frac{S}{V} \times \frac{2n}{n^2-1}\,. \tag{3}$$

Чтобы лодка двигалась поперек реки, необходимо, чтобы направление ее скорости относительно воды $V_B$ составляло некоторый угол φ с перпендикуляром к направлению течения (см. рис.2). При этом составляющая скорости $V_B'$ против течения будет компенсирована скоростью течения V, а результирующая скорость лодки В будет направлена перпендикулярно течению. Из треугольника ОСВ находим:

$$V_B = \sqrt{V_B'^2 - V^2} = V\sqrt{n^2 - 1}\,. \tag{4}$$

Удалившись на расстояние S от бакена (бакен совпадает с точкой О), лодка В начнет двигаться назад. При этом картина движения остается аналогичной рассмотренной. Результирующая скорость по величине будет совпадать с (2). Поэтому полное время, требуемое лодке В для возвращения к бакену будет равно длине пути 2S, деленной на скорость $V_B$:

$$t_B = \frac{2S}{V_B} = \frac{S}{V} \times \frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\,. \tag{5}$$

Взяв отношение выражений (1) и (3) найдем искомую величину:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \approx 1.8\,.$$

2.2.7 Тело брошено со скоростью $V_o = 15$м/с под углом $\alpha=60^o$ к горизонту с высоты $h = 5$м. 1) На какую высоту Н подниметтело? 2) Сколько времени оно будет в движении? 3) На каком расстоянии S от места бросания тело упадет на землю? 4) Какова величина скорости непосредственно перед падением тела на землю? 5) Какова величина угла $\beta$ между касательной к траектории тела и поверхностью земли в момент падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $V_o = 15$м/с, $\alpha = 60^\circ$, $h = 5$м.

Найти: H, t, S, V, $\beta$

Решение.

Выберем направление осей координат так, как показано на рис.3, т.е. ось X направим горизонтально в сторону движения тела, ось У - вертикально вверх так, чтобы она прошла через начальную точку A траектории тела. Тело считаем материальной точкой. Спроектируем скорость V на направления осей, и для каждой составляющей запишем уравнение изменения её со временем. Поскольку ускорение земного притяжения направлено вертикально вниз, т.е. имеет лишь составляющую вдоль оси У ($g_y = -g$), имеем:

$$V_x = V_{xo} = const = V_o \cos \alpha \qquad (1)$$

$$V_y = V_{yo} - gt = V_o \sin \alpha - gt . \qquad (2)$$

1) В момент максимального подъема тела компонента скорости вдоль оси у равна нулю. Приравнивая $V_y$ нулю, из (2) получаем:

$$t = \frac{V_o \sin \alpha}{g} .$$

При равноускоренном движении, которым является составляющая движения вдоль оси У, для соответствующей компоненты перемещения тела можно написать выражение

$$S_y = S_{yo} + V_{yo}t - \frac{gt^2}{2} ; \qquad H = 13.6 \text{ м} .$$

2) В момент падения тела на землю его У - координата равна

нулю. Начальное же ее значение равно h. С учетом этого, а также того, что $V_{yo} = V_o \sin\alpha$, имеем:

$$-\frac{gt^2}{2} + V_o \sin\alpha\, t + h = 0 .$$

Решив его относительно t, получим:

$$t_1 = \frac{V_o \sin\alpha}{g} - \frac{\sqrt{V_o^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} ;$$

$$t_2 = \frac{V_o \sin\alpha}{g} + \frac{\sqrt{V_o^2 \sin\alpha + 2gh}}{g} .$$

Первое значение отрицательно, поэтому его отбрасываем, поскольку рассматриваем движение тела при $t>0$. В результате, время движения тела определяется вторым корнем:

$$t_д = t_2 = 3 \text{ кг} . \qquad (3)$$

3) Поскольку X-компонента равна нулю, связь перемещения вдоль X с соответствующей скоростью дается выражением

$$S = V_x t_д = V_o \cos\alpha t_д .$$

Это соответствует равномерному движению. Подставив сюда значение $t_д$ из (3) получаем:

$$S = 22.5\text{м} .$$

4) Компонента скорости вдоль оси У в момент падения равна:

$$V_y = V_{oy} - gt_д , \qquad (4)$$

где t-время движения. Составляющая скорости по оси X, как уже отмечалось, не меняется. Результирующий модуль скорости тогда равен:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2\,\cos^2\alpha + (V_0\,\sin\alpha - gt)^2}\,.$$

С учетом (3) получаем:

$$V = 18\ м/с\,.$$

5) Тангенс угла $\beta$ определяется отношением длин сторон $|CD|$ и $|BC|$ (см.рис.3). Они пропорциональны соответствующим компонентам скорости в момент падения.

$$tg\,\beta = \frac{V_y}{V_x}\Bigg|_{t=t_д} = \frac{V_0\,\sin\alpha - gt_д}{V_0\,\cos\alpha}\,.$$

Здесь мы воспользовались выражением (4). С учетом значения (3) получаем:

$$tg\,\beta = 2.2 \qquad \beta = 65.6^\circ.$$

2.2.8 Движение материальной точки задано уравнением:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}(A + Bt^3) + \vec{j}Ct,$$

где $A = 5м$; $B = -3м/с^3$; $C = 12м/с$. Найти выражения $V(t)$ и $a(t)$ для момента времени $t = 1с$ вычислить модули скорости $|V|$, ускорения $|a|$, тангенциального ускорения $|a_т|$, нормального ускорения $|a_н|$.

Дано: $\vec{r}(t) = \vec{i}(A + Bt^3) + \vec{j}ct$: $A = 5м$; $B = -3м/с^3$;
$C = 12м/с$; $t = 1с$

Найти: $V(t)$, $a(t)$, $|V|$, $|a|$, $|a_т|$, $|a_н|$.

Решение.

Для нахождения выражений для $\vec{V}(t)$ и $\vec{a}(t)$ необходимо функцию $\vec{r}(t)$ продифференцировать соответственно один и два раза по $t$. При этом вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$ считаются постоянными. После этого получаем:

$$\vec{V}(t) = \vec{i}\times 3Bt^2 + \vec{j}\times C$$

$$\vec{a}(t) = 6Bt\vec{i} .$$

Модули скорости и ускорения определяются выражениями:

$$|V(t)| = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)}$$

$$|a(t)| = \sqrt{a_y^2(t) + a_y^2(t)} ,$$

где X- и Y-компоненты равны соответствующим множителям при векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Подставляя их явный вид, с учетом того, что $a_y=0$, получаем:

$$|V(t)| = \sqrt{9B^2t^4 + c^2} \qquad (1)$$

$$|a(t)| = |6Bt| . \qquad (2)$$

После подстановки значения t = 1 получаем:

$$|V(1)| = 15 \text{ м/с} \qquad |a(1)| = 18 \text{ м/с}^2 .$$

Тангенциальное ускорение определяется изменением модуля скорости в единицу времени. Для его нахождения продифференцируем выражение (1) по t:

$$a_\tau(t) = \frac{18B^2t^3}{\sqrt{9B^2t^4 + c^2}} .$$

Подставив значение $t = 1$, получаем $a_\tau(1) = 12.5$.

Учитывая, что вектор полного ускорения складывается из нормального и тангенциального ускорения, которые взаимно перпендикулярны, можем записать выражение:

$$a^2(t) = a_n^2(t) + a_\tau^2(t) .$$

Из него можно определить $a_n$ для момента времени $t = 1$ :

$$a_n(1) = \sqrt{a^2(1) - a_\tau^2(1)} = 14.4 \text{ м/с}$$

2.2.9 Из пункта А, находящегося на шоссе (см. рис. 4), необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт В, расположенный в поле на расстоянии $l$ от шоссе. Известно, что скорость машины по полю в $\eta$ раз меньше её скорости по шоссе. На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе?

Решение.

Обозначим длину отрезка AD через L, а CD - через X, тогда полное время движения машины от A к B складывается из времени движения от A к C, где скорость равна V, и от C к D, где скорость равна $V/\eta$. Тогда:

$$t = \frac{|AC|}{V} + \frac{|CB|}{V} \times \eta .$$

Длины отрезков равны $|AC| = L - x$, $|CB| = \sqrt{x^2 + l^2}$. Теперь полное время движения запишется в виде:

$$t = \frac{L-x}{V} + \frac{\sqrt{x^2+l^2}}{V} \times \eta .$$

Поскольку мы ищем наименьшее время движения, необходимо найти минимум приведенного выше выражения для t. Для этого продифференцируем его по X и приравняем производную нулю, получим:

$$-\frac{1}{V} + \frac{\eta x}{V\sqrt{x^2+l^2}} = 0 .$$

Из последнего соотношения находим:

$$x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2-1}} .$$

Так как $\eta$ - величина безразмерная, то как и должно быть, величина X измеряется в тех же единицах, что и l, то есть в метрах.

2.2.10 Пистолетная пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расстояние l между которыми равно 40м. Пробоина во втором месте оказалась на h = 20см ниже, чем в первом. Определить скорость V пули, если к первому листу она подлетела, двигаясь горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: l = 40м, h = 20см.

Найти: V

Решение.

Ось X направим горизонтально в сторону полета пули, ось У - вертикально вверх. Начало координат поместим в месте пробоины первого листа. Пулю считаем материальной точкой. Проекция ускорения земного притяжения на ось У равна -g, на ось X - нулю. За время движения пули от первого ко второму листу У-компонента смещения изменяется на h. Применим к ней выражение h через время в случае равноускоренного движения с начальными значениями У-координаты и У-скорости, равными нулю:

$$-h = \frac{-gt^2}{2}$$

Отсюда:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

За это время пуля пролетает расстояние l между двумя листами. Учитывая, что движение вдоль направления X происходит с постоянной скоростью $V_x = V$ (т.к. X-компонента ускорения равна нулю), получим соотношение

$$l = Vt = V \times \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

Отсюда
$$V = l\sqrt{\frac{g}{2h}} .$$

Подставив значение $l = 40м$, $g = 9.81м/с^2$, $h = 0.2м$ получим:

$$V = 198 \text{ м/с} .$$

2.2.11 Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At + Bt^4$, где $A = 2рад/с$, $B = 0.5рад/с^4$. Определить к концу третьей секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 70 см от оси вращения, тангенциальное $a_\tau$, нормальное $a_н$ и полное $a$ ускорения.

Дано: $B = 0.5рад/с^4$, $A = 2рад/с$, $l = 70см$, $t = 3с$.

Найти: $\varepsilon$, $\omega$, $a(l)$, $a_\tau$, $a_н$, $a$

Решение.

1) Угловая скорость диска равна производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A + 4Bt^3 . \qquad (1)$$

2) Угловое ускорение диска определяется производной от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 12Bt^2 . \qquad (2)$$

3) Тангенциальное и нормальное ускорения связаны с угловым ускорением и угловой скоростью соответствующими выражениями. С учетом (1) и (2) получим:

$$a_\tau = \varepsilon R = 12BRt^2$$

$$a_n = \omega^2 R = (A+4Bt^3)^2 R.$$

Полное ускорение выражается через нормальное и тангенциальное ускорения следующим образом:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Подставляя в последние три выражения значения $t = 3$, $R = 0.7$м, $A = 2$рад/с, $B = 0.5$рад/с$^4$ получим:

$$\omega = 35\ c^{-1}, \quad \varepsilon = 54\ c^{-2}, \quad a_\tau = 37.8\ м/c^2$$
$$a_n = 2195.2\ м/c^2, \quad a = 2195.3\ м/c^2.$$

2.2.12 Точка A начала двигаться по окружности радиуса $R=2$ с центром в точке O так, что её радиус - вектор $\vec{r}$ относительно точки P (см. рис. 5) поворачивается с угловой скоростью, зависящей от времени как $\omega = \lambda t$, где $\lambda = 3/2$рад/с$^2$. Найти угловую скорость точки A относительно O, модули линейной скорости частицы, её тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени $t = 4$с.

Дано: $R = 2$, $\lambda = 3/2$ рад/с$^2$, $t = 4$с

Найти: $\omega_o$, $v$, $a_\tau$, $a_н$, $a_п$

Решение.

Поскольку треугольник OPA является равнобедренным, то углы APO и PAO равны, кроме того их сумма равна углу AOA$'$. Отсюда следует, что AOA$'$ = 2 APO. Продифференцировав это соотношение по времени, получим, что мгновенная угловая скорость точки A относительно P в два раза больше её угловой скорости относительно O.

$$\omega_o = 2\omega_p = 2\lambda t.$$

Угловое ускорение точки A относительно O определяется производной по времени:

$$\varepsilon_o = \frac{d\omega_o}{dt} = 2\lambda.$$

Линейная скорость, тангенциальное и нормальное ускорения связаны с $\omega_0$ и $\varepsilon_0$ соотношениями:

$$V = \omega_0 R = 2\lambda Rt \qquad (1)$$

$$a_\tau = \varepsilon_0 R = 2\lambda R \qquad (2)$$

$$a_n = \omega_0{}^2 R = 4\lambda^2 R t^2 . \qquad (3)$$

Полное ускорение выражается через $a_\tau$ и $a_n$:

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} .$$

Подставляя в выражения (1)-(3) значения величин $\lambda = 3/2$рад/с$^2$, $t = 4$с, $R = 2$м, получим:

$V = 24$ м/с, $a_\tau = 6$ м/с$^2$, $a_n = 288$ м/с$^2$, $a = 288.06$ м/с$^2$.

2.2.13 Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $l = 1$м друг от друга, вращается с угловой скоростью, соответствующей частоте $\upsilon = 1000$ об/мин. Пуля, летящая вдоль оси на некотором расстоянии от неё, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол 20°. Найти скорость пули.

Дано: $l = 1$м, $\upsilon = 1000$ об/мин, $\varphi = 20°$.

Найти: V

Решение.

За время, пока пуля пролетает расстояние между дисками $l$, система дисков успевает повернуться на угол $\varphi$, поэтому пробоины взаимно смещены. Время пролета равно времени поворота дисков.

$$t = \frac{\varphi}{\omega} . \qquad (1)$$

$\nu$ оборотов дисков в минуту равно $\nu/60$ оборотам в секунду. Один полный оборот соответствует углу 360°. Значит:

$$\omega = \frac{360\nu}{60} = 6\nu . \qquad (2)$$

С учетом выражений (1) и (2) найдем скорость пули:

$$V = \frac{l}{t} = \frac{l}{\varphi} \times 6\nu .$$

Подставляя значения $l$=1м, $\varphi$=20°, $\nu$=1000 об/мин, получим:

$$V = 300 \text{ м/с} .$$

2.2.14 Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток $\Delta t$ = 10с достиг частоты вращения $\nu$=300 об/мин. Определить угловое ускорение $\varepsilon$ маховика и число N оборотов, которое он сделал за это время.

Дано: $\Delta t$ = 10с, $\nu$ = 300 об/мин.

Найти: $\varepsilon$, N

Решение.

Маховик, делая $\nu$ оборотов в минуту, делает их $\nu'$ в секунду:

$$\nu' = \nu/60 .$$

При этом угловая скорость его:

$$\omega' = \nu' \times 2\pi = \frac{2\pi\nu}{60} .$$

Используя выражение для угловой скорости, найдем угловое ускорение $\varepsilon$:

$$\omega = \varepsilon\Delta t \; ; \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi\nu}{60\Delta t} . \qquad (1)$$

Полный угол поворота равен:

$$\varphi = \frac{\varepsilon(\Delta t)^2}{2} .$$

Он соответствует N оборотам:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon(\Delta t)^2}{4\pi} = \frac{\omega\Delta t}{4\pi} . \qquad (2)$$

Подставив известные величины в (1) и (2), получаем:

$$\varepsilon = 3.14\ c^{-2}, \qquad N = 25 .$$

2.2.15 На токарном станке протачивается вал диаметром d=80 мм. Продольная подача резца равна 0.5 мм за один оборот. Какова скорость резания V, если за интервал времени $\Delta t$ = 1мин протачивается участок вала длиной l = 10см?

Дано: d = 80мм , $\Delta t$ = 1мин, l = 10см, h = 0.5мм

Найти: V

Решение.

Поскольку за время $\Delta t$ протачивается длина вала l, то за единицу времени проточится длина:

$$l' = \frac{l}{\Delta t} .$$

Это будет соответствовать $\nu$ оборотам вала:

$$\nu = \frac{l'}{h} = \frac{l}{\Delta t h} .$$

Следовательно, угловая скорость вращения вала:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi l}{\Delta t h} .$$

Скорость резания совпадает с линейной скоростью точек цилиндрической поверхности вала:

$$V = \frac{\omega d}{2} = \frac{\pi d l}{\Delta t h}.$$

Подставив численные значения и переводя минуты в секунды, получаем ответ:

$$V = 0.83 \text{ м/с}.$$

## 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТЕЛА, СОВЕРШАЮЩЕГО ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

### 3.1. Основные законы и формулы

1. Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

в векторной форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a} \text{ или } \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

где $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - геометрическая сумма сил действующих на материальную точку;

$m$ - масса;

$\vec{a}$ - ускорение;

$\vec{P} = m\vec{V}$ - импульс (количество движения);

$n$ - число сил, действующих на точку;

в координатной форме (скалярной):

$$ma_x = \sum_i F_{xi}\ ; \quad ma_y = \sum_i F_{yi}\ ; \quad ma_z = \sum_i F_{zi}$$

$$\text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_i F_{xi}\ ; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_i F_{yi}\ ; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_i F_{zi},$$

где под знаком суммы стоят проекции сил $F_i$ на соответствующие оси координат.

2. Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского).

$$ma = F + F_p \text{, где } F_p = -u\frac{dm}{dt} \text{ - реактивная сила;}$$

u - скорость течения газов из ракеты.

3. Формула Циолковского для определения скорости ракеты:

$$V = u\,ln\frac{m_o}{m} \text{, где } m_o \text{ - начальная масса ракеты.}$$

4. Сила тяжести.

$$F_T = mg \text{, где } g = 9.81 \text{ м/с}^2 \text{ - ускорение свободного падения тел.}$$

5. Сила упругости.

$$F_{упр} = -kx$$

k - коэффициент упругости (жесткость в случае пружины),
x - абсолютная деформация.

6. Сила гравитационного взаимодействия.

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

где $G = 6.67\times10^{-11}$ м$^2$/кг$\times$с$^2$ - гравитационная постоянная;

$m_1$ и $m_2$ - массы взаимодействующих тел, рассматриваемых как материальные точки;

r - расстояние между ними.

7. Сила трения скольжения.

$F_{тр} = fN$, где $f$ - коэффициент трения скольжения;
$N$ - сила нормального давления.

8. Сила трения качения.

$F_{тр} = f_к N/r$, где $f_к$ - коэффициент трения качения;
$r$ - радиус катящегося тела.

9. Координаты центра масс системы материальных точек

$$X_C = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{\sum\limits_i m_i}\ ;\ Y_C = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{\sum\limits_i m_i}\ ;\ Z_C = \frac{\sum\limits_i m_i z_i}{\sum\limits_i m_i}.$$

### 3.2. Задачи.

3.2.1 На наклонной плоскости находится груз $m_1$ = 6кг, связанный нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, с другим грузом $m_2$ = 2кг. Коэффициент трения между первым грузом и плоскостью $\mu = 0.2$; угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Определить ускорение грузов.

Дано: $m_1$ = 6кг, $m_2$ = 2кг, $\mu = 0.1$, $\alpha = 30^\circ$.
Найти: $a$

Решение.

В задаче рассматриваются два тела, связанные нитью и совершающие поступательное движение. Если нить считается нерастяжимой, то ускорения этих тел равны по модулю:

$$a_1 = a_2.$$

Рассмотрим два тела отдельно: на тело массы $m_1$ действует сила тяжести $m_1\vec{g}$ сила нормальной реакции $\vec{N}$ наклонной плоскости, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Сила трения направлена в сторону, противоположную скорости тела. Так как в данной задаче направление движения не указано, то необходимо сначала определить направление движения при отсутствии трения, а затем уже решать задачу с учетом силы трения (см. рис. 6).

Второй закон Ньютона для первого тела без учета силы трения имеет вид:

$$\vec{m_1 a_1} = \vec{m_1 g} + \vec{T} + \vec{N}. \qquad (1)$$

На тело $m_2$ действуют только сила тяжести $m_2g$ и сила натяжения нити $\vec{T'}$:

$$\vec{m_2 a_2} = \vec{m_2 g} + \vec{T'}. \qquad (2)$$

Введя оси координат и заменяя векторные уравнения (1) и (2) скалярными равенствами, получим систему уравнений, решение которой позволит определить направление ускорения $a_1$. Для замены векторных уравнений (1) и (2) скалярными введем для описания движения тела $m_1$ оси X и Y, тела $m_2$ - ось Z, как указано на рис.6. Учитывая, что нить нерастяжима, а блок невесом $T' = T$, имеем:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha - T \qquad (3)$$

$$m_2 a_{2z} = T - m_2 g \qquad\qquad a_{1x} = a_{2z}.$$

Решая совместно систему уравнений (3), имеем:

$$a_{1x} = g\,\frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} = 9.8 \times \frac{6 \times 0.5 - 2}{6 + 2} = 1.225 > 0.$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось X положительна, значит тело $m_1$ движется вниз по наклонной плоскости, а сила трения направлена вверх по этой плоскости. Теперь можно ввести силу трения в скалярные уравнения (1), учитывая, что $a_{1x} = a_{2z} = a$ $F_{трx} = -\mu N$ - согласно закону Амонтона.

Тогда: $$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T - \mu N;$$

$$m_2 a = T - m_2 g.$$

Силу нормального давления N найдем из уравнения (1), записанного в скалярном виде для проекций на ось Y:

$$a_{1y} = 0 \qquad 0 = N - m_1 g\cos\alpha,$$

откуда $N = m_1 g \times \cos\alpha$.

Окончательно:
$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g\cos\alpha - T - \mu m_1 g\cos\alpha \\ m_2 a = T - m_2 g\,. \end{cases} \qquad (4)$$

Решая совместно систему уравнений (4), получим:

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 9.8\,\frac{6\times(0.5-0.1\times0.866)-2}{6+2} =$$

$$= 0.588\ \text{м/с}^2.$$

3.2.2 В вагоне, движущемся горизонтально с ускорением $a$=2м/с$^2$, висит на шнуре груз массы $m$=200г. Найти силу натяжения шнура и угол отклонения шнура от вертикали.

Дано: $m$ = 200г = 0.2кг, $a$ = 2 м/с$^2$

Найти: $T$, $\alpha$

Решение.

В задаче рассматривается движение тела, ни о форме которого, ни о линейных размерах ничего не сказано. Значит, ни форма, ни линейные размеры на характер движения не влияют, а тело можно принять за материальную точку. Независимо от состояния вагона (покой или движение) на груз действуют только две силы: сила тяжести и сила натяжения шнура. При движении вагона с ускорением шнур отклонится от вертикали в сторону, противоположную направлению ускорения, и обе действующие на груз силы должны сообщить грузу относительно Земли ускорение, равное ускорению вагона. Выберем систему координат, жестко связанную с Землей XOY (см. рис. 7) и запишем: 2 закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}\,,$$

где $\vec{a}$ - ускорение груза относительно Земли;

$\vec{T}$ - искомая сила натяжения.

Запишем уравнение (1) в скалярной форме - в виде проекций сил и ускорения на оси координат, т.е. OX и OY: получим:

$$ma = T\times\sin\alpha \qquad OX$$
$$0 = T\times\cos\alpha - mg \qquad OY.$$

При совместном решении этих уравнений найдем:

$$\frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{ma}{mg} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right) = \operatorname{arctg} 0.204 = 11.5^0$$

о

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2} = 0.2\sqrt{(2)^2 + (9.8)^2} = 2H.$$

3.2.3 Груз массы m=400г, привязанный к нити длиной l=50см, вращается в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что нить описывает коническую поверхность. При этом угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 45^0$. Найти угловую скорость $\omega$ вращения груза и силу натяжения нити.

Дано: m = 400г = 0.4кг, l = 50см = 0.5м, $\alpha = 45^0$.

Найти: $\omega$, T

Решение.

Груз можно принять за материальную точку, движущуюся с постоянной скоростью по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости (см. рис. 8). Это означает, что касательное ускорение:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0,$$

следовательно, силы трения и любого сопротивления отсутствуют и полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_n \; ; \text{ т.к. } a_\tau = 0$$

равно нормальному. Используя связь линейных и угловых величин, запишем:

$$a = a_n = \omega^2 R \text{ , где } R \text{ - радиус окружности.}$$

Исходя из вышеизложенного, на груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, расположенные в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка. Запишем 2-й закон Ньютона для данной системы:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \, .$$

Для определения искомых величин перейдем к скалярным соотношениям, для этого введем систему координат XOY, согласно рис.8.

Запишем II закон Ньютона в скалярном виде:

по оси OX: $ma_n = T \times \sin\alpha$

OY: $0 = -mg + T \times \cos\alpha$ .

Исходя из этих уравнений находим:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0.4 \times 9.8}{0.707} = 5.54 \text{ Н}$$

$$ma_n = mg \times tg\alpha \qquad a_n = g \times tg\alpha = \omega^2 R$$

$\omega = \sqrt{\dfrac{g \times tg\alpha}{R}}$ ; Радиус окружности, по которой движется груз $R = l \times \sin\alpha$.

Тогда:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \times tg\alpha}{l \times \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l \times \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.5 \times 0.707}} = 5.27 \text{ с}^{-1}$$

3.2.4. Череэ блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привяэаны груэы $m_1 = 0.5$кг и $m_2 = 0.6$кг. Найти силу давления блока на ось при движении груэов в двух случаях: лифт поднимается равномерно и с ускорением $a_o = 1.2$ м/с$^2$. Масса блока пренебрежимо мала. Трением в оси пренебречь.

Дано: $m_1 = 0.5$кг, $m_2 = 0.6$кг, $a_o = 1.2$м/с$^2$, $a_o = 0$

Найти: $F_D$

Решение:

Груэы движутся относительно блока (относительно лифта) и участвуют в движении лифта с ускорением $\vec{a}_o$. Если нить нерастяжима, то ускорение груэов относительно блока одинаковы по модулю, но противоположны по направлениям. Относительно Земли ускорения груэов:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_o + \vec{a}_1{}' \qquad \vec{a}_2 = \vec{a}_o + \vec{a}_2{}',$$

где $\vec{a}_o$ - ускорение лифта

$\vec{a}_1{}'$ - ускорение груэа $m_1$ относительно блока

$\vec{a}_2{}'$ - ускорение груэа $m_2$ относительно блока.

Каждый иэ груэов движется под действием силы тяжести и силы натяжения нити. Невесомость нити поэволяет считать силу натяжения вдоль нити, постоянной по модулю.

Таким обраэом, согласно III эакона Ньютона (см. рис.9):

$$T_1 = T_1{}' = T_2 = T_2{}' = T.$$

Коллинеарность сил, действующих на каждый иэ груэов, поэволяет эаписать уравнения движения сраэу в скалярной форме для проекций на ось OY:

для первого груэа:

$$a_{1y} = a_o + a_1{}'; \quad m_1(a_o + a_1{}') = T - m_1 g, \tag{1}$$

для второго груэа:

$$a_{2y} = a_o - a_1'; \quad m_2(a_o - a_2') = T - m_2 g. \qquad (2)$$

Решая систему с двумя неизвестными T и $a_1'$ путем умножения уравнения (1) на $m_2$, а уравнения (2) на $m_1$ и складывая их почленно, получим:

$$T = 2m_1 m_2(a_o+g)/(m_1+m_2).$$

Искомая сила давления блока на ось:

$$F_D = N = 2T.$$

Тогда при равномерном движении лифта $a_o = 0$

$$F_D = 4gm_1m_2/(m_1+m_2) = 4 \times 0.5 \times 0.6 \times 9.8/(0.5 + 0.6) = 10.7 \text{ Н}$$

При подъеме лифта с ускорением $a_o = 1.2 м/с^2$

$$F_D = \frac{4m_1m_2(g+a_o)}{m_1+m_2} = \frac{4\times0.5\times0.6(9.8+1.2)}{0.5 + 0.6} = 12 \text{ Н}.$$

3.2.5 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^o$. Пройдя расстояние $S = 36.4 см$ , тело приобретает скорость $V = 2 м/с$. Чему равен коэффициент трения тела о плоскость?

Дано: $S = 36.4 см = 0.364 м$, $V = 2 м/с$, $\alpha = 45^o$.

Найти: $\mu$

Решение.

На тело по наклонной плоскости действуют две силы: сила тяжести $F_т$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, возникающая при движении и направленная в сторону, противоположную скорости тела. Для решения задачи воспользуемся II законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{F}_{тр} + \vec{N}. \qquad (1)$$

Введя оси координат X и Y , как показано на рис.10. заменим векторное уравнение (1) скалярными равенствами; т.е. проекциями сил, действующими на тело по осям OX и OY:

$$OX:\quad ma = F_{ck} - F_{тр} \qquad (2)$$
$$OY:\quad 0 = N - mg\times\cos\alpha ,$$

где $F_{тр} = N\times\mu$ согласно закона Амонтона

$F_{ck} = mg\times\sin\alpha$.

Решая совместно систему уравнений (2), получим:

$$N = mg\times\cos\alpha$$

$$\mu = \frac{mg\times\sin\alpha - ma}{mg\times\cos\alpha} = \frac{m(g\times\sin\alpha - a)}{mg\times\cos\alpha} = \frac{g\times\sin\alpha}{g\times\cos\alpha} - \frac{a}{g\times\cos\alpha} = tg\alpha - \frac{a}{g\times\cos\alpha} . \qquad (3)$$

Для определения коэффициента трения необходимо определить ускорение движущегося тела. Движение поступательное, равноускоренное. Воспользуемся уравнениями равноускоренного движения:

$$\left.\begin{array}{l} S = V_0 t + \dfrac{at^2}{2} \\ V = V_0 + at \end{array}\right\}$$

т.к. тело начинает движение из состояния покоя, то $V_0 = 0$.

Тогда

$$S = \frac{at^2}{2} ; \quad V = at .$$

Решая совместно эти уравнения найдем ускорение:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} ; \quad t = \frac{V}{a} ;$$

где t-время скольжения тела на пути S.

Тогда

$$\frac{2S}{a} = \frac{V^2}{a^2} \qquad \_ = \frac{V^2}{2S}.$$

Подставим значение ускорения: $a = \dfrac{V^2}{2S}$ в формулу (3) и определим коэффициент трения:

$$\mu = tg\alpha - \frac{V^2}{2Sg \times \cos\alpha} = 1 - \frac{4}{2 \times 0.364 \times 9.8 \times 0.707} = 0.2$$

## 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 4.1 Основные законы и формулы

1. Момент инерции материальной точки:

$J = mr^2$, где $m$ - масса точки

$r$ - расстояние до оси вращения.

2. Момент инерции системы материальных точек или тела:

$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, где $r_i$ - расстояние материальной точки массой $m_i$ до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс:

$$J = \int r^2 dm.$$

3. Момент инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; $m$ - масса тела):

Момент инерции тел Таблица 1.

| Тела | Положение оси вращения | Момент инерции |
|---|---|---|
| Полый тонкостенный цилиндр радиусом R | Ось симметрии | $mR^2$ |
| Сплошной цилиндр или диск радиусом R | Ось симметрии | $\frac{1}{2} mR^2$ |
| Прямой тонкий стержень длиной l | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину | $\frac{1}{12} ml^2$ |
| То же | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец | $\frac{1}{3} ml^2$ |
| Шар радиусом R | Ось проходит через центр шара | $\frac{2}{5} mR^2$ |

4. Теорема Штейнера:

$$J = J_o + md^2,$$

где $J_o$ - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;

J - момент инерции, относительно оси параллельной оси, проходящей через центр масс и отстоящей от нее на расстоянии d;

m - масса тела.

5. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T_{вр} = \frac{J\omega^2}{2},$$ где J - момент инерции относительно оси,

$\omega$ - угловая скорость тела.

6. Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$$T = T_{кин} + T_{вр} = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2},$$

где m - масса тела;

$J_C$ - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;

$V_C$ - скорость центра масс;

$\omega$ - угловая скорость тела.

7. Момент силы относительно неподвижной точки:

$$\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{F}],$$

$$M = F\times l$$

$$M = r\times\sin\alpha\times F,$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$;

M - модуль момента силы;

l - плечо силы ($l = r\times\sin\alpha$)- кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения;

$\alpha$ - угол между радиус - вектором $\vec{r}$ и вектором силы $\vec{F}$.

8. Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно оси вращения:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i z_i = J_i\times\omega,$$

где $z_i$ - расстояние от оси до отдельной частицы тела;
$m_i V_i$ - импульс этой частицы;
$J_i$ - момент инерции относительно оси;
$\omega$ - угловая скорость.

9. Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad M = \frac{d\omega}{dt} \times J = J\varepsilon,$$

где $\varepsilon$ - угловое ускорение;
$J$ - момент инерции тела относительно оси.

10. Закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L} = Const; \quad J_1\omega_1 = J_2\omega_2 = J_3\omega_3,$$

где $J_1;J_2;J_3$ - моменты инерции системы в различных состояниях;
$\omega_1;\omega_2;\omega_3$ - угловые скорости в различных состояниях.

11. Работа постоянного момента силы M, действующего на вращающееся тело:

$$A = M \times \varphi,$$

где $\varphi$ - угол поворота тела.

12. Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела:

$$N = M \times \omega.$$

13. Величины, характеризующие динамику вращательного движения, и формулы, описывающие это движение, аналогичны соответствующим величинам и формулам поступательного движения: (см. таб. 2).

**Динамика вращательного движения** **Таблица 2.**

| Поступательное движение | Вращательное движение |
|---|---|
| **Основной закон динамики** | |
| $F\Delta t = mV_2 - mV_1$ | $Mdt = J\omega_2 - J\omega_1$ |
| $F = ma$ | $M = J\varepsilon$ |
| **Закон сохранения** | |
| импульса | момента импульса |
| $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i = const$ | $\sum\limits_{i=1}^{n} J_i\vec{\omega}_i = const$ |
| **Работа и мощность** | |
| $A = F \times S \times \cos\alpha$ | $A = M \times \varphi$ |
| $N = F \times V$ | $N = M \times \omega$ |
| **Кинетическая энергия** | |
| $T = \dfrac{1}{2} m V^2$ | $T = \dfrac{1}{2} J \omega^2$ |

4.2.1 В однородном диске массой m=1 кг и радиусом R=30 см вырезано круглое отверстие диаметром d=20 см, центр которого находится на расстоянии l=15 см от оси диска. Найти момент инерции J полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

Дано: m=1 кг, R=30 см, d=20 см, l=15 см
Найти: J

Решение.

Общий момент инерции полученного тела определяется:

$$J = J_o - J_x' .$$

где $J_o$ - собственный момент инерции диска относительно оси O, $J_x$ - момент инерции вырезанного тела относительно оси O, проходящей через центр масс (см. рис. 11).

В свою очередь $J_x$ определяемый по теореме Штейнера:

$$J_x = J_{01} + m_1 \times l^2,$$

где $J_{01}$ - момент инерции вырезанного тела относительно оси $O_1$; $m_1$ - масса вырезанного тела; l - расстояние между осями O и $O_1$.

Тогда общий момент инерции полученного тела:

$$J = J_o - (J_{01} + m_1 l^2). \qquad (1)$$

Так как фигуры тел известны - диск, то момент инерции:

$$J = 1/2\, m \times r^2,$$

где $\overset{o}{m}$ - масса тела, R - радиус тела.

Можно записать:

$$J = \frac{1}{2} mR^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 d^2}{4} + m_1 l^2 \right) . \qquad (2)$$

Для определения момента инерции полученного тела, необходимо знать массу $m_1$ вырезанного тела.

Зная, что $m = \rho V$, где $\rho$ - плотность материала тела; V - объем тела. Определим $m_1$ - массу вырезанного тела.

$$V = Sh,$$

где S - площадь тела; h - толщина тела.

Тогда:

$$\rho = \frac{m}{Sh} = \frac{m_1}{S_1 h} .$$

На основании того, что плотность полученного тела и вырезаннного тела одна и та же,

$$\frac{m}{S} = \frac{m_1}{S_1}, \quad m = \frac{m_1 S_1}{S},$$

где $S_1$ - площадь вырезанного тела: $S_1 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

$S$ - площадь диска $S = \pi R^2$.

Тогда:

$$m_1 = \frac{m\,\pi d^2}{4\,\pi R^2} = \frac{m\,d^2}{4R^2}.$$

Подставим значение $m_1$ в уравнение (2), получим:

$$J = \frac{1}{2}mR^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{md^2\,d^2}{4R^2} + \frac{m\,d^2}{4R^2}l^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2 - \frac{m\,d^2}{32R^2}(d^2 + 8l^2) =$$

$$= \frac{1\times9\times10^{-2}}{2} - \frac{1\times4\times10^{-2}}{32\times9\times10^{-2}}\left(4\times10^{-2} + 8\times2.25\times10^{-2}\right) =$$

$$= 4.19\times10^{-2}\ \text{кг м}^2.$$

4.2.2 Маховик, массу которого $m = 5$ кг можно считать распределенной по ободу радиуса $r = 20$ см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой $\nu = 12\ c^{-1}$. При торможении маховик останавливается через промежуток времени $\Delta t = 20$ с. Найти тормозной момент и число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки (см. рис. 12).

Дано: $m = 5$ кг, $r = 20$ см, $\nu = 12\ c^{-1}$, $\Delta t = 20$ с

Найти: $M$, $N$

Решение.

Если тормозной момент постоянен, то движение маховика равнозамедленное, и основное уравнение динамики вращательного движения можно записать в виде:

$$J\Delta\vec{\omega} = \vec{M}\Delta t, \tag{1}$$

где $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_0$ - изменение угловой скорости за интервал времени $\Delta t$, $\vec{M}$ - искомый тормозной момент.

Векторному уравнению (1) соответствует скалярное уравнение:

$$J\Delta\omega = M\,\Delta t. \tag{2}$$

$\Delta\omega$ и $M$ - модули соответствующих векторов:

Тогда:

$$M = \frac{J\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Для определения тормозного момента необходимо оценить изменение угловой скорости, т.к. $\omega_1 = 0$ - маховик остановился, а $\omega_0 = 2\pi\nu$, то $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_0| = 2\pi\nu$.

Момент инерции маховика $J = mr^2$, тогда:

$$M = \frac{J\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{mr^2\times 2\pi\nu}{\Delta t} = \frac{5\times 4\times 10^{-2}\times 2\times 3.14\times 12}{20} =$$

$$= 0.75 \text{ Н}\times\text{м}.$$

Векторы тормозящего момента $\vec{M}$ и $\Delta\vec{\omega}$ направлены в сторону, противоположную вектору $\vec{\omega}_0$, т.к. движение равнозамедленное. Найдем число оборотов маховика до остановки, воспользовавшись уравнениями вращательного движения. Так как движение равнозамедленное, то угловое перемещение, пройденное маховиком до остановки, и угловая скорость определятся выражениями:

$$\Delta\varphi = \omega_0\Delta t - \frac{\varepsilon(\Delta t)^2}{2} \qquad (1)$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \varepsilon\Delta t .$$

Учитывая, что $\omega_1 = \omega_0 - \varepsilon\Delta t = 0$, преобразуем выражение (4)

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_0 \times \Delta t}{2} .$$

Зная, что угловое перемещение $\varphi$ связано с числом оборотов N соотношением:

$$\varphi = 2\pi N .$$

Определим число оборотов N маховика до остановки:

$$N = \frac{v \times \Delta t}{2} = \frac{12 \times 20}{2} = 120 \text{ оборотов.}$$

4.2.3 Через блок, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы $m_1 = 500$г и $m_2 = 200$г. Масса блока $m_0 = 400$г. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.

Дано: $m_1 = 500г = 0.5кг$, $m_2 = 200г = 0.2кг$,

$m_0 = 400г = 0.4кг$

Найти: a

Решение:

Заданная система состоит из трех тел - грузов $m_1, m_2$ и блока $m_0$. Груз $m_1$ находится под действием двух сил: силы тяжести $m_1\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T_1}$. Второй закон Ньютона для этого груза.

$$m_1\vec{g} + \vec{T_1} = m_1\vec{a_1} . \qquad (1)$$

Аналогично, рассматривая силы, действующие на груз $m_2$, по-

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 . \qquad (2)$$

Блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр, следовательно, моменты сил тяжести блока и реакции оси равны 0. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения для блока:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 , \qquad (3)$$

где $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ моменты сил натяжения $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$.

Благодаря невесомости нити силы натяжения вдоль нити с каждой из сторон блока одинаковы по модулю: $T_1=T_1'$ , $T_2=T_2'$. Ускорение обоих грузов считаем равными по модулю на основании нерастяжимости нити.

$$a_1 = a_2 = a = \varepsilon \times r , \qquad (4)$$

где $\varepsilon$ - угловое ускорение блока,
$r$ - радиус блока.

Для описания движения грузов в скалярном виде введем ось У, как показано на рис. 13. Тогда: $a_{1y} = a$, $a_{2y} = -a$, и векторные уравнения (1) и (2) можно заменить скалярными:

$$m_1 a = m_1 g - T_1 \ ; \quad -m_2 a = m_2 g - T_2 . \qquad (5)$$

Моменты сил $T_1'$ и $T_2'$ направлены по оси вращения, но в противоположные стороны. Тогда векторное уравнение (3) можно переписать в виде:

$$J\varepsilon = T_1 r - T_2 r ,$$

где $r$ - радиус блока,

$$J = \frac{m_0 r^2}{2} \ \text{ - момент инерции блока .}$$

Тогда

$$\frac{m_0 r^2 \times a}{2 \times r} = r(T_1 - T_2),$$

сокращая получим:

$$m_0 a = 2(T_1 - T_2). \qquad (6)$$

Решая совместно систему уравнений (5) и (6) получаем:

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_0/2} = \frac{0.5 - 0.2}{0.5 + 0.2 + 0.2} \times 9.8 = 3.26\ м/с^2.$$

4.2.4 На скамье Жуковского сидит человек и держит в вытянутых руках гири по 10кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи $l_1$ = 50см. Скамья вращается с частотой $\nu_1$ = 1$с^{-1}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси $l_2$ = 20см. Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $J_0$ = 2.5 кг×$м^2$. Ось вращения проходит через центр масс человека и скамьи.

Дано: $m$ = 10кг, $l_1$ = 50см = 0.5м, $l_2$ = 0.2м,
$J_0$ = 2.5 кг×$м^2$, $\nu_1$=1$с^{-1}$.

Найти: A, $\nu_2$.

Решение.

Частота вращения скамьи Жуковского изменяется в результате действий, производимых человеком при сближении гирь. В системе тел скамья-человек-гири все эти силы являются внутренними и не изменяют ни импульса, ни момента импульса системы. Так как все тела системы совершают чисто вращательное движение, то следует рассматривать только момент импульса системы.

При перемещении гирь относительно оси вращения на систему скамья-человек-гиря действуют внешние силы: силы реакции оси, линия действия которых проходит через ось; силы тяжести и сила нормальной реакции, параллельные оси вращения. Моменты всех этих сил относительно вертикальной оси равны нулю. Следовательно, момент импульса этой системы остается постоянным:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \qquad \vec{J_1\omega_1} = \vec{J_2\omega_2}\,, \tag{1}$$

где $\vec{J_1\omega_1}$ и $\vec{J_2\omega_2}$ - моменты импульса системы в первом и втором состоянии.

Все перечисленные внешние силы не создают вращающего момента относительно оси и, следовательно, не совершают работы. Поэтому изменение кинетической энергии системы равно работе, совершаемой человеком:

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}\,. \tag{2}$$

При этом следует отметить, что гири движутся в одной горизонтальной плоскости и потенциальная энергия их не изменяется. Перепишем векторное уравнение (1) в скалярном виде:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2\,. \tag{3}$$

В первом положении, до сближения гирь, момент инерции всей системы равен:

$$J_1 = J_o + 2ml_1^2,$$

где $m$ - масса гири,

$l_1$ - расстояние от оси до гири.

Во втором положении, после сближения:

$$J_2 = J_o + 2ml_2^2\,.$$

Зная, что угловая скорость вращения $\omega$ связана с частотой вращения следующим соотношением: $\omega = 2\pi\nu$ и подставив его в уравнение (3) получим:

$$(J_o + 2ml_1^2)\times\nu_1 = (J_o + 2ml_2^2)\times\nu_2\,.$$

Тогда:

$$\nu_2 = \frac{\nu_1(J_o+2ml_1^2)}{J_o + 2ml_2^2} = \frac{1\times(2.5 + 2\times10\times0.25)}{2.5 + 2\times10\times0.04} = 2.3\ c^{-1}.$$

Работу, совершенную человеком, определим по формуле (2). Учитывая, что: $\omega_2 = J_1\omega_1^2/J_2$, получим:

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}\left(J_1 - J_2\right) =$$

$$= \frac{J_o + 2ml_1^2}{J_o + 2ml_2^2}\, 2\pi^2\nu_1^2 \times 2m(l_1^2 - l_2^2) =$$

$$= \frac{2.5 + 2\times10\times0.25}{2.5 + 2\times10\times0.04}\,(2\times3.14)^2\times5.29\times10\times(0.25-0.04) = 190 \text{ Дж}.$$

4.2.5 Стержень длиной $l$=2м и массой $m$=10кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m_1$=10г, летящая в горизонтальном напрвлении со скоростью $V_0$=400м/с и застревает в стержне. На какой угол $\alpha$ отклонится стержень после удара?

Дано: $m$=10кг, $l$=2м, $m_1$=10г=0.01кг, $V_0$=400м/с

Найти: $\alpha$

Решение:

Удар пули следует рассматривать, как неупругий: после удара и пуля и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями. Что же происходит при ударе ? Пуля, ударившись о стержень, за ничтожно маленький промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью $\omega$ и сообщает ему кинетическую энергию:

$$T = \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J$ - момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на искомый угол $\alpha$, причем центр масс (точка C) поднимается на высоту $h = l/2(1-\cos\alpha)$ (см. рис. 14). В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией:

$$\Pi = mgh = mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha). \qquad (2)$$

Используя закон сохранения энергии $T=\Pi$, получим:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{J\omega^2}{2},$$

отсюда вычислим угол отклонения:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{J\omega^2}{mgl}.$$

Подставим в эту формулу значения момента инерции стержня относительно оси:

$$J = \frac{1}{3}ml^2 \quad \text{получим}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}. \qquad (3)$$

Для нахождения угла отклонения $\alpha$ необходимо определить угловую скорость $\omega$. В момент удара пули в стержень действуют только силы тяжести, линия действия которых проходит через ось вращения. Поэтому моменты этих сил относительно оси равны 0. Тогда будет справедлив закон сохранения момента импульса. $J\omega = L = const$. В начальный момент удара: угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса: $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в него, сообщив ему угловую скорость. Начальный момент импульса пули: $L_{o2} = m_1 V_o \times r$, где $r$ - расстояние точки попадания пули от оси вращения. В конце удара стержень имел угловую скорость $\omega$, а пуля - линейную скорость $V$, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии $r$ от оси вращения. Так как $V = \omega r$, то конечный момент импульса пули $L_2 = m_1 V r = m_1 r^2 \omega$. Используя закон сохранения импульса, запишем: $L_{o1} + L_{o2} = L_1 + L_2$ или $m_1 V_o \times r = J\omega + mr^2\omega$.

Тогда:

$$\omega = \frac{m_1 V_o r}{J+mr^2},$$

где $J = \dfrac{1}{3} ml^2$ - момент инерции системы стержень-пуля

$$\omega = \frac{m_1 V_o \times r}{\dfrac{ml^2}{3} + mr^2} \qquad (4)$$

т.к. $r = \dfrac{l}{2}$, имеем: $\omega = \dfrac{10^{-2} \times 400 \times 2/2}{\dfrac{10 \times 4}{3} + \dfrac{10 \times 4}{4}} = 0.171$ рад/с.

из уравнения (3) найдем:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{l\omega^2}{3g} = 1 - \frac{2 \times (0.171)^2}{3 \times 9.8} = 1 - 0.00199 = 0.998.$$

Тогда угол отклонения $\alpha$ равен:

$$\alpha = \arccos 0.998 = 4^\circ.$$

# 5. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

## 5.1 Основные закон" и формулы

1. Работа, совершаемая постоянной силой:

$$dA = F_s dS = FdS \times \cos\alpha,$$

где $F_s$ - проекция силы на направление перемещения;
$\alpha$ - угол между направлениями силы и перемещения.

2. Работа переменной силы на пути S:

$$A = \int_s F_s dS = \int_s F\cos\alpha\, dS.$$

3. Средняя мощность за промежуток времени $\Delta t$:

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

4. Мгновенная мощность:

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad N = FV = FV\cos\alpha.$$

5. Кинетическая энергия поступательного движения:

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

6. Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h:

$\Pi = mgh$ ; где $g = 9.81$ м/с$^2$ - ускорение свободного падения.

7. Потенциальная энергия упруго деформированного тела:

$$П = \frac{kx^2}{2};$$ где k - коэффициент упругости; x - деформация.

8. Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы):

$$T + П = E = Const.$$

9. Закон сох анения импульса:

$$P = m \times V = Const.$$

10. Скорости двух тел массами $m_1$ и $m_2$ после абсолютно упругого центрального удара:

$$V_1 = \frac{(m_1-m_2)V_{10} + 2m_2V_{20}}{m_1 + m_2};$$

$$V_2 = \frac{(m_2-m_1)V_{20} + 2mV_{10}}{m_1 + m_2},$$

где $V_{10}$ и $V_{20}$ - скорости тел до удара.

11. Скорос движения тел после абсолютно неупругого центрального удара:

$$V = \frac{m_1V_{10} + m_2V_{20}}{m_1 + m_2}.$$

12. Коэффициент восстановления:

$$\varepsilon = \frac{V}{V_0},$$ где $V_0$ и $V$ - нормальные составляющие относительной скорости тел до и

после удара.

## 5.2 Задачи

5.2.1 Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь S=5м и приобрела скорость V=2м/с. Определить работу A силы, если масса m вагонетки равна 400кг и коэффициент трения $\mu$=0.01.(см рис. 15).

Дано: S=5м, V=2м/с, m=400кг, $\mu$=0.01.

Найти: A

Решение:

Работа постоянной силы F определяется как $A=F\times S\times \cos\alpha$ , где S - путь, пройденный телом под действием силы F; $\alpha$ - угол, под которым приложена данная сила. Рассмотрим движение вагонетки и силы, действующие на нее. На вагонетку действуют следующие силы: сила тяжести Fт, сила трения Fтр и постоянная сила F, заставляющая двигаться вагонетку равноускоренно. Выберем направление движения вагонетки по оси X, как указано на рис. 15. Т.к. направление действия силы F не указано в условии задачи, то вектор силы совпадает с направлением движения и $\cos\alpha=1$ , где $\alpha$ - угол между вектором силы F и направлением движения. Для определения силы, вызвавшей движение вагонетки, воспользуемся II-м законом Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_т + \vec{F}_{тр} . \qquad (1)$$

Запишем данный закон в скалярном виде для проекций сил на ось X:

$$ma = F - F_{тр} ; \quad где \quad F_{тр} = \mu \times N .$$

N - сила реакции опоры вагонетки, равная силе тяжести:

$$N = F_т = mg .$$

Тогда:

$$F = ma + \mu \times mg . \qquad (2)$$

Для определения силы F необходимо выяснить, - рением движется вагонетка.

Движение равноускоренное, поэтому воспользуемся формулой:

$$2Sa = V^2 - V_0^2,$$

где S - путь, пройденный телом;
V - скорость, приобретенная телом;
$V_0$- начальная скорость движения, в нашем случае $V_0=0$;
a - ускорение тела.

Тогда:

$$a = \frac{V^2}{2S} . \qquad (2)$$

Подставим значение a из формулы (3) в уравнение (2), получим:

$$F = \frac{m \times V^2}{2S} + \mu mg .$$

Определим работу A силы F:

$$A = FS = \left( \frac{m \times V^2}{2S} + \mu mg \right) \times S = \frac{mV^2}{2} + \mu mg \times S =$$

$$= \frac{400 \times 4}{2} + 0.01 \times 400 \times 9.81 \times 5 = 998 \text{ Дж} .$$

5.2.2 Камень брошен вверх под углом $\varphi=60^0$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия $T_0$ камня в начальный момент времени равна 20Дж. Определить кинетическую T и потенциальную П энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь (см. рис. 16).

Дано: $T_0$=20Дж, $\varphi = 60^0$

Найти: T, П

Решение:

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту, в плоской системе координат ХОУ с начальной скоростью $V_o$. Точка А характеризует положение тела в высшей точке его траектории, т.е. высота подъема над уровнем Земли равна h. Кинетическая энергия - это энергия движения и определяется по формуле:

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

а потенциальная энергия - это энергия, определяемая положением тела в пространстве по отношению к поверхности Земли, выражается формулой:

$$П = mgh.$$

Так как движение тела осуществляется под действием гравитационных сил, то скорость движения тела по оси X остается неизменной, а по оси У изменяется по закону:

$$V_y = V_{oy} - gt,$$

где $V_{oy}$ - начальная скорость тела в проекциях на ось У. Поэтому в т.А, наибольшей высоте подъема, скорость тела будет равна проекции начальной скорости $V_o$ на ось X, т.е. $V_{ox}$, а $V_y=0$.

Найдем проекции вектора $\vec{V_o}$ на ось X и У:

$$V_{ox} = V_o \times \cos\alpha; \quad V_{oy} = V_o \times \sin\alpha.$$

Тогда кинетическая энергия в начальный момент времени равна:

$$T_o = \frac{mV_o^2}{2},$$

а масса камня определится как

$$m = \frac{2T_o}{V_o^2}.$$

Кинетическая энергия в т.А определится

$$T = \frac{mV_{ox}^2}{2}.$$

Подставим в это выражение значение проекции скорости $V_{ox} = V_o \times \cos\alpha$ и массы камня.

Тогда получим:

$$T = \frac{2T_o \times (V_o^2 \times \cos^2\alpha)}{V_o^2 \times 2} = T_o \times \cos^2\alpha = 20 \times \cos^2 60^0 = 5 \text{ Дж}.$$

Для определения потенциальной энергии в т.А воспользуемся двумя способами:

1 способ: Необходимо определить высоту h наибольшего подъема камня. Используем уравнение движения камня, под действием сил тяжести.

$$h = V_{oy}t - \frac{gt^2}{2}; \quad V_y = V_{oy} - gt;$$

$$\text{т.к. } V_y = 0; \quad V_{oy} = gt, \text{ тогда } t = \frac{V_{oy}}{g}.$$

Подставим значение времени в уравнение, определяющее max высоту h:

$$h = \frac{V_{oy} \times V_{oy}}{g} - \frac{g \times V_{oy}^2}{2g^2} = \frac{1}{2} \times \frac{V_{oy}^2}{g}.$$

Зная max высоту подъема камня, определим потенциальную энергию в т.А

$$П = mgh = \frac{2T_o g}{V_o^2} \times \frac{1}{2}\,\frac{V_{oy}^2}{g} = \frac{T_o \times V_{oy}^2}{V_o^2}; \text{ т.к. } V_{oy} = V_o \times \sin\alpha,$$

Имеем:

$$П = \frac{T_0 V_0^2 \times Sin^2\alpha}{V_0^2} = T_0 \times Sin^2\alpha \quad 20 \times Sin^2\alpha = 15 \text{ Дж} .$$

2 способ: Воспользуемся законом сохранения механической энергии.

$$E_м = T + П = Const .$$

Отсюда можно записать:

$$T_0 + П_0 = T + П ,$$

где $T_0$ и $П_0$ - кинетическая и потенциальная энергии в начальный момент времени;

T и П - кинетическая и потенциальная энергии в т.А.

Так как $П_0 = 0$ (тело находилось на поверхности Земли), то $П = T_0 - T = 20 - 5 = 15$ Дж .

5.2.3 Насос выбрасывает струю воды диаметром d=2см со скоростью V=20м/с. Найти мощность N, необходимую для выбрасывания воды.

Дано: $d = 2см = 2 \times 10^{-2} м$, $V = 20 м/с$ .

Найти: N

Решение.

Мгновенная мощность насоса определяется по формуле:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{FS}{t} = FV ,$$

где F - сила, выталкивающая струю воды

V - скорость струи .

Сила, выталкивающая струю воды, определяется по II закону Ньютона: $F = ma$,

где m - масса воды ;

a - ускорение .

Определим m - массу воды

$m = \rho V$;

где $\rho$ - плотность воды;

$W$ - объем струи воды, который определяется как $W = S_{пл} \times l$;

$S_{пл}$ - площадь струи:

$$S_{пл} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$l$ - длина струи.

Длину струи воды определим по формуле: $l = V^2/2a$,

где $V$ - скорость струи.

Тогда:

$$m = \rho \times S_{пл} \times l = \rho \times \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{V^2}{2a} = \frac{\rho \pi d^2 V^2}{8a}.$$

Сила, выталкивающая струю воды:

$$F = ma = \frac{\rho \pi d^2 \times V^2}{8a} \times a = \frac{\rho \pi d^2 V^2}{8}.$$

Тогда мгновенная мощность насоса:

$$N = FV = \frac{\rho \pi d^2 V^2}{8} \times V = \frac{\rho \pi d^2 V^3}{8} = \frac{10^3 \times 3.14 \times 4 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^3}{8} =$$

$$= 1.26 \times 10^3 \text{ вт} = 1.26 \text{ квт}.$$

5.2.4 На горизонтальных рельсах стоит платформа с песком (общая масса $m_1 = 5 \times 10^3$ кг). В песок попадает снаряд массы $m_2 = 5$кг, летевший вдоль рельсов. В момент попадания скорость снаряда $V = 400$м/с и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти скорость платформы, если снаряд застревает в песке.

Дано: $m_1 = 5 \times 10^3$, $m_2 = 5$кг, $\alpha = 30^\circ$, $V = 400$м/с.

Найти: $u$

**Решение.**

Платформа приобретает скорость $u$ в результате взаимодействия со снарядом. На систему платформа-снаряд действуют внешние силы: сила тяжести, сила нормальной реакции рельсов и сила трения. Если пренебречь действием силы трения на платформу во время удара, то поскольку силы тяжести и нормальной реакции рельсов строго вертикальны, можно считать, что проекция вектора импульса системы на горизонтальное направление остается постоянной. Это позволит найти скорость $u$, которую приобретает платформа после удара. Сила взаимодействия снаряда с платформой - сила диссипотивная, поэтому механическая энергия системы убывает. Введем ось X, направленную как показано на рис.17. Закон сохранения импульса имеет вид:

$$P_{1x} = P_{2x}, \qquad (1)$$

где $P_{1x} = m_2V\times\cos\alpha$ - проекция вектора импульса системы на ось X до взаимодействия тел,

$P_{2x} = (m_1+m_2)\times u$ - проекция вектора импульса системы на ось X после взаимодействия тел.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$m_2V\times\cos\alpha = (m_1+m_2)u .$$

Откуда:

$$u = \frac{m_2V\times\cos\alpha}{m_1+m_2} = \frac{5\times400\times\cos30^\circ}{(5\times10^3+5)} = 0.346\text{м/с} .$$

5.2.5 После абсолютно упругого соударения тела массы $m_1$, движущегося поступательно, с покоившимся телом массы $m_2$ оба тела разлетаются симметрично относительно направления вектора скорости первого тела до удара. Определить, при каких значениях $n=m_1/m_2$ это возможно. Рассчитать $n$ для двух случаев: угол $\alpha$ между векторами скоростей тел после удара равен $\pi/3$ и $\pi/2$.

Дано: $m_1$, $m_2$, $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Найти: n

Решение.

Происходит абсолютно упругое соударение двух тел. Если рассматривать не каждое из тел в отдельности, а систему тел $m_1$, $m_2$, то силы при ударе будут внутренними, а система - замкнутой в течении времени удара. В этом случае выполняются два закона сохранения: импульса и механической энергии. Запишем закон сохранения импульса для данной системы:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 \quad m_1\vec{V}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \tag{1}$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \tag{2}$$

Для перехода от векторной формы записи данных законов к скалярным соотношениям, введем оси координат OX и OY, как показано на рис.18.

В проекции на оси OX и OY имеем:

$$P_{1y}=0.$$

$$P_{2y}=m_1u_1\times\sin\frac{\alpha}{2} - m_2u_2\times\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$P_{1x}=m_1V_1$$

$$P_{2x}= m_1u_1\times\cos\frac{\alpha}{2} + m_2u_2\times\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда закон сохранения импульса в скалярном виде:

$$0 = m_1u_1\sin\frac{\alpha}{2} - m_2u_2\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$m_1V_1 = m_1u_1\cos\frac{\alpha}{2} + m_2u_2\cos\frac{\alpha}{2} . \qquad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что $m_1u_1 = m_2u_2$. Подставим это равенство в уравнение (4), получим:

$$mV_1 = 2m_1u\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (5)$$

в уравнение (2), при условии $m_2 = \frac{m_1}{n}$ получим:

$$m_1V_1^2 = m_1u_1^2(n+1) . \qquad (6)$$

Уравнение (5) и (6) образуют систему, совместное решение которой дает:

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2} = n+1 . \qquad (7)$$

Если тело $m_1$ обладает меньшей массой, чем покоившееся тело $m_2$, то $0<n<1$.

# 6. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

## 6.1. Основные законы и формулы

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{\mu} kT ,$$

где p-давление; V - объем; m - масса газа; $\mu$ - молярная масса; R - универсальная газовая постоянная; T - термодинамическая температура.

$$\frac{m}{\mu} = \nu \text{ - количество вещества;}$$

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где $N$ - число молекул газа; $N_A$ - число Авогадро.

Если система представляет собой смесь нескольких газов, то количество вещества системы:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r .$$

Закон Дальтона определяет давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n ,$$

где $p_n$ - парциальные давления компонент смеси.

Основное уравнение кинетической теории газов:

$$p = \frac{2}{3} n\langle E_n \rangle ,$$

где $n$ - концентрация молекул; $\langle E_n \rangle$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения.

Средняя полная кинетическая энергия молекулы:

$$\langle E_i \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где $i$ - число степеней свободы молекулы; $k$ - постоянная Больцмана.

Зависимость давления газа от концентрации и температуры:

$$p = nkT .$$

Скорости молекул:

средняя квадратичная $\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$ ;

средняя арифметическая $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ ;

наиболее вероятная $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$,

где m - масса молекулы.

Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении:

$$C_V = \frac{i}{2} R \ ; \qquad C_p = \frac{i+2}{2} R .$$

Уравнение Майера:

$$C_p = C_V + R .$$

Первое начало термодинамики:

$$dQ = dU + dA,$$

где dQ - количество теплоты; dU - изменение внутренней энергии; dA = pdV - работа, совершаемая газом.

Внутренняя энергия газа:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{m}{\mu} C_V RT.$$

Работа при изотермическом процессе:

$$A = \frac{m}{\mu} \times R \times T \times \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Уравнение Пуассона и работа при адиабатическом процессе:

$$pV^{j} = \text{const}; \quad A = \frac{RT_1}{j-1} \times \frac{m}{\mu} \times \left\{ 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{j-1} \right\},$$

где $j = C_p/C_V$ - показатель адиабаты.

Термический КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1-Q_2}{Q_1} = \frac{T_1-T_2}{T_1},$$

где $Q_1$ - тепло, полученное рабочим телом от нагревателя;

$Q_2$ - тепло, переданное рабочим телом холодильнику;

$T_1$ и $T_2$ - температуры нагревателя и холодильника.

Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S = S_2-S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

## 6.2. Задачи

6.2.1 Определить число молекул, содержащихся в стакане воды, и массу одной молекулы.

Решение:

Число N молекул, содержащихся в жидкости массой m, равно

$$N = \nu N_A,$$

где $\nu$ - количество вещества;

$N_A$ - число Авогадро, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$;

$\nu = m/\mu$, $\mu$ - молярная масса.

Формула воды - $H_2O$. Таким образом, молярная масса определяется:

$$\mu = (2 \times 1+16) \times 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Количество молекул в стакане:

$$N = \frac{0.2 \times 6.02\times10^{23}}{18\times10^{-3}} = 6 \times 10^{24} \text{ молекул.}$$

Масса одной молекулы определяется как отношение молярной массы к числу Авогадро:

$$m_1 = \frac{\mu}{N_A} = \frac{18\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}} \text{ кг} = 2.99\times10^{-26} \text{ кг.}$$

6.2.2. Вычислить массу моля электронов

Решение.

В одном моле вещества содержится $N_A$ - число Авогадро - частиц. Масса покоя электрона $m = 9.1\times10^{-31}$ кг.

Таким образом имеем:

$$M = m \times N_A = 9.1\times10^{-31}\times6.02\times10^{23} = 5.47\times10^{-7} \text{ кг.}$$

6.2.3. В баллоне объемом $V = 20$ л находится газ гелий под давлением $p_1 = 0.5$ МПа и при температуре $T_1 = 320$ К. После того как из баллона было взято $m = 10$ г гелия, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление газа $p_2$, оставшегося в баллоне.

Дано: $V = 20$л; $p_1 = 0.5$ МПа, $T_1 = 320$ К; $m = 10$ г;
$T_2 = 290$ К

Найти: $p_2$

Решение.

Состояние газа описывается уравнением Менделеева-Клапейрона. Применив его к каждому состоянию, имеем:

$$p_2V = \frac{m_2}{\mu} \times R \times T_2 . \qquad (1)$$

где $m_2 = m_1 - m$ - масса гелия в конечном состоянии,
$\mu$ - молярная масса,
$R$ - универсальная газовая постоянная.

Для первоначального состояния имеем:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1 ; \qquad (2)$$

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1} . \qquad (3)$$

Из уравнения (1) следует

$$p_2 = \frac{m_2}{\mu} \times \frac{RT_2}{V} ; \qquad (4)$$

$$p_2 = \frac{m_1 - m}{\mu} \times \frac{RT_2}{V} .$$

Подставим выражение (3) в уравнение (4), тогда

$$p_2 = \left( \frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m \right) \times \frac{RT_2}{\mu V} .$$

После преобразования имеем:

$$p_2 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1} \times \frac{RT_2}{\mu V} - \frac{mRT_2}{\mu V} ;$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} \times p_1 - \frac{m}{\mu} \times \frac{RT_2}{V} .$$

Выразим величины в единицах СИ и произведем вычисления.

$V = 20л = 2\times10^{-2} м^3$, $m = 10г = 10^{-2}$ кг ,
$R = 8.31$ Дж/моль×К, $p = 0.5$ МПа $= 0.5\times10^6$ Па,
$\mu = 4\times10^{-3}$ кг/моль

$$p = \frac{290}{320} 0.5\times10^6 - \frac{10^{-2}}{4\times10^{-3}} \times \frac{8.31\times290}{2\times10^{-2}} = 0.152 \text{ МПа} .$$

6.2.4. Смесь озона и кислорода находится в посуде под давлением p = 1.2 МПа. Определить парциальные давления $p_1$ и $p_2$ газов, если масса кислорода составляет 20% массы смеси.

Дано: p = 1.2 МПа, m(кислор)/m(смеси) = 20%

Найти: p1, p2

Решение.

Парциальное давление некоторого газа в смеси есть давление, под которым находился бы этот газ, если бы из сосуда были удалены остальные газы, а объем и температура сохранились прежними.

Для любого газа смеси справедлив закон Менделеева-Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT ;$$
$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT , \qquad (1)$$

где $p_1$ и $p_2$ - соответственно парциальные давления кислорода и азота;

$m_1$ и $m_2$ - массы кислорода и азота;

$\mu_1$ и $\mu_2$ - молярные массы кислорода и азота.

Для смеси так же справедлив закон

$$pV = \frac{m}{\mu} RT ; \qquad (2)$$

p, m, $\mu$ - давление, масса и молярная масса смеси.

Согласно закону Дальтона

$$p = p_1 + p_2, \qquad (3)$$

а так же

$$m = m_1 + m_2 .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \text{ т.е. } \mu = \frac{\mu_1\mu_2}{0.2\mu_2+0.8\mu_1}. \qquad (4)$$

Выразив из (1) соответственно $p_1$ и $p_2$, используя (2) и (4) и подставив численные значения, имеем:

$$\frac{RT}{V} = \frac{\mu p}{m};$$

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \times \frac{RT}{V} = \frac{m_1}{\mu_1} \times \frac{p\mu}{m} = \frac{0.2\times m\times p\times \mu_1\times\mu_2}{\mu_1\times m\times(0.2\mu_2+0.8\mu_1)};$$

$$p_1 = \frac{0.2\times1.2\times10^6\times28\times10^{-3}}{(0.2\times28+0.8\times32)\times10^{-3}} = 0.22\times10^6 \text{ Па.}$$

$$p_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \times \frac{RT}{V} = \frac{m_2}{\mu_2} \times \frac{p\mu}{m} = \frac{0.8m\times p\times\mu_1\mu_2}{\mu_2\times m\times(0.2\mu_2+0.8\mu_1)};$$

$$p_2 = \frac{8\times1.2\times10^6\times32\times10^{-3}}{(0.2\times28+0.8\times32)\times10^{-3}} = 0.98\times10^6 \text{ Па.}$$

6.2.5. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle E_0\rangle$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением $p = 0.3$ Па. Концентрация молекул газа $n = 10^{13}$ см$^{-3}$ = $10^{19}$ м$^{-3}$.

Дано: $p = 0.3$ Па, $n = 10^{19}$м$^{-3}$

Найти: $\langle E_0\rangle$

Решение.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения

$$\langle E_0\rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k - постоянная Больцмана;

T - абсолютная температура.

С другой стороны зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT,$$

где n - концентрация.

Выразив из последнего выражения kT и подставив в первое, получим:

$$\langle E_0 \rangle = \frac{3}{2} \times \frac{p}{n} = \frac{3\times 0.3}{2\times 10^{19}} = 0.45\times 10^{-19}\ Дж.$$

$$\langle E_0 \rangle = 4.5\times 10^{-18}\ Дж.$$

6.2.6. В сосуде объемом V = 0.4 л при температуре T = 300 K находится газ. На сколько понизится давление $\Delta p$ газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $\Delta N = 10^{20}$ молекул?

Дано: V = 0.4 л, T = 300 K, $\Delta N = 10^{20}$.

Найти: $\Delta p$

Решение.

Согласно уравнению состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT,$$

где p - давление; V - объем; $\nu$ - количество вещества; R - универсальная газовая постоянная; T - термодинамическая температура Кельвина.

Количество вещества однородного газа есть:

$$\nu = \frac{m}{\mu} \quad или \quad \nu = \frac{N}{N_A},$$

где m - масса газа; $\mu$ - молярная масса; N - число молекул газа; $N_A$ - число Авогадро.

Первоначально имеем:

$$p_1 = \frac{\nu_1 RT}{V},$$

где $p_1$ - давление газа до утечки; $\nu_1$ - количество вещества до утечки.

Давление газа после утечки:

$$p_2 = \frac{\nu_2 RT}{V},$$

Тогда

$$\Delta p \quad p_1 - p_2 = \frac{\nu_1 RT}{V} - \frac{\nu_2 RT}{V} = (\nu_1 - \nu_2) \times \frac{RT}{V} =$$

$$= \left( \frac{N_1}{N_A} - \frac{N_2}{N_A} \right) \times \frac{RT}{V} = \frac{\Delta N}{N_A} \times \frac{RT}{V},$$

где $N_1 - N_2 = \Delta N$ - количество молекул, покинувшее сосуд.
Таким образом:

$$\Delta p = \frac{\Delta N}{N_A} \times \frac{RT}{V} = \frac{10^{20} \times 8.31 \times 300}{6.02 \times 10^{23} \times 0.4 \times 10^{-3}} = 1.035 \text{ кПа}.$$

6.2.7. Определить суммарную кинетическую энергию E поступательного и вращательного движения всех молекул двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом V = 3 л под давлением p = 540 кПа.

Дано: V = 3 л, p = 540 кПа

Найти: E

Решение.

Средняя полная кинетическая энергия молекулы:

$$\langle E_i \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i - число степеней свободы. Для двухатомного газа i

*5. Постоянная Больцмана $k = R/N_A$, где $R$ - универсальная газовая постоянная, $N_A$ - число Авогадро.

Суммарная энергия всех молекул $N$ есть

$$E = N\langle E_1 \rangle .$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона имеем:

$$pV = \frac{N}{N_A} RT ,$$

откуда

$$N = \frac{pVN_A}{RT} .$$

Таким образом:

$$E_o = \frac{pVN_A}{RT} \times \frac{i}{2} kT = \frac{pVN_A}{kN_AT} \times \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} pV ;$$

$$E = \frac{5}{2} \times 540 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = 4.05\times10^3 \text{ Дж} ;$$

$$E = 4.05 \text{ кДж}.$$

6.2.8. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти формулу наиболее вероятной скорости.

Решение.

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям выглядит следующим образом:

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \times v^2 \times e^{-(m_0v^2/2kT)} ,$$

где $f(v)$ - функция распределения молекул по скоростям; $dN(v)$ - число молекул, имеющих скорость, лежащую в пределах от $v$ до $v+dv$; $N$ - общее число молекул; $m_0$ - масса молекул; $T$ - температура.

Согласно определению, наиболее вероятная скорость соответствует максимуму функции распределения, следовательно, необходимо найти максимум $f(v)$ и выразить скорость. Для этого необходимо взять первую производную от функции распределения и полученное выражение приравнять к нулю.

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \times e^{-(m_0 v^2/2kT)} \times 2v -$$

$$- 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \times v^2 \times e^{-(m_0 v^2/2kT)} \times \frac{2m_0 v}{2kT} ;$$

$$4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \times e^{-(m_0 v^2/2kT)} \times\left(2v - \frac{m_0 v^3}{kT}\right) = 0 ;$$

$$2 - \frac{m_0 v^2}{kT} = 0 ;$$

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} .$$

6.2.9. Кислород находится под давлением $p$ = 133 нПа при температуре $T$ = 200 К. Вычислить среднее число столкновений $\langle z\rangle$ в единицу времени молекулы кислорода при этих условиях.

Дано: $p$ = 133 нПа, $T$ = 200 К

Найти: $\langle z\rangle$

Решение.

Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за единицу времени

$$\langle z\rangle = \sqrt{2} \times \pi d^2 n\langle v\rangle ,$$

где $d$ – эффективный диаметр молекулы, $d = 2.7\times10^{-10}$ м;

$n$ – концентрация молекул;

$\langle v \rangle$ - средняя арифметическая скорость.

Средняя арифметическая скорость:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8RT/(\pi\mu)} = \sqrt{3kT/(\pi m)},$$

где $m$ - масса молекулы;

$\mu$ - молярная масса.

Используя зависимость давления давления газа от концентрации и темп ратуры, находим $n$:

$$p = nkT \text{ , откуда } \quad n = p / kT .$$

Подставляя данные зависимости в первое выражение, получим:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \times \pi d^2 \times p/kT \times \sqrt{8RT/\pi\mu} \ ;$$

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\times 3.14\times(2.7)^2\times 10^{-20} \times \frac{133\times 10^{-9}}{1.38\times 10^{-23}\times 200} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{8\times 8.31\times 200}{3.14\times 32\times 10^{-3}}} \ ;$$

$$\langle z \rangle = 5.6 \times 10^{-3} \ c^{-1} .$$

6.2.10. Определить молярные теплоемкости $C_V$ и $C_p$ смеси двух газов одноатомного и двухатомного. Количество вещества $\nu_1 = 0.4$ моль для одноатомного газа и $\nu_2 = 0.2$ моль для двухатомного газа.

Дано: $\nu 1 = 0.4$ моль, $\nu 2 = 0.2$ моль

Найти: $C_V$, $C_p$

Решение.

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси на $\Delta T$ при $V = \text{const}$ можно выразить двумя способами:

$$Q = c_V(m_1+m_2)\Delta T ;$$

$$Q = c_{V1}m_1\Delta T + c_{V2}m_2\Delta T = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T ,$$

где $c_v$ - удельная теплоемкость смеси;

$m_1$ и $m_2$ - масса одноатомного и двухатомного газа соответственно;

$c_{v1}$ - удельная теплоемкость одноатомного газа;

$c_{v2}$ - удельная теплоемкость двухатомного газа.

Приравнивая правые части и разделив на $\Delta T$, получим:

$$c_v(m_1+m_2) = c_{v1}m_1+c_{v2}m_2 .$$

Молярные теплоемкости $C_p$ и $C_v$ связаны с удельными теплоемкостями $c_p$ и $c_v$ соответственно как:

$$C_p = c_p\mu \qquad C_v = c_v\mu ,$$

где $\mu$ - молярная масса.

Молярные теплоемкости связаны с числом степеней свободы $i$ следующим образом:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R \qquad C_v = \frac{i}{2} R ,$$

где $i$ - число степеней свободы.

Таким образом имеем:

$$\frac{C_v}{\mu} = \frac{C_{v1}/\mu_1 \times m_1 + C_{v2}/\mu_2 \times m_2}{m_1 + m_2} .$$

Количество вещества $\nu$ и молярная масса $\mu$ связаны между собой

$$\nu = \frac{m}{\mu} ,$$

где $m$ - масса вещества.

Для смеси имеем:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} .$$

Тогда

$$\frac{C_V}{\mu} = \frac{C_{V1}/\mu_1 \times \nu_1\mu_1 + C_{V2}/\mu_2 \times \nu_2\mu_2}{m_1 + m_2};$$

$$\frac{C_V}{\mu} = \frac{C_{V1} \times \nu_1 + C_{V2} \times \nu_2}{\mu(\nu_1 + \nu_2)};$$

$$C_V = \frac{3/2 \times \nu_1 R + 5/2 \times \nu_2 R}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{(3/2 \times \nu_1 + 5/2 \times \nu_2)R}{\nu_1 + \nu_2};$$

$$C_V = \frac{(3/2 \times 0.4 + 5/2 \times 0.2) \times 8.31}{0.4 + 0.2} = 15.23 \text{ Дж/моль} \times \text{К} .$$

Проделаем аналогичные вычисления для молярной теплоемкости $C_p$ при постоянном давлении и получим:

$$C_p = \frac{(5/2 \times \nu_1 + 7/2 \times \nu_2)R}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{(5/2 \times 0.4 + 7/2 \times 0.2) \times 8.31}{0.4 + 0.2};$$

$$C_p = 23.54 \text{ Дж/моль} \times \text{К} .$$

Либо $C_p$ можно вычислить из соотношения Майера:

$$C_p = C_V + R .$$

6.2.11. Атмосферное давление изменилось от $p_1$ = 983 гПа до $p_2$ = 1003 гПа. Какое приращение $\Delta U$ получает при этом внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате объемом V = 50м$_3$? Температура в комнате предполагается неизменной.

Дано: p1 = 983 гПа, p2 = 1003 гПа, V = 50м$_3$, T = const

Найти: $\Delta U$

Решение.

Внутренняя энергия идеального газа определяется:

$$U = \frac{i\,m}{2\mu} RT,$$

где $i = 5$ - число степеней своб ды;

$m$ - масса газа;

$\mu$ - молярная масса;

$T$ - температура.

Изменение внутренней энергии газа в данной задаче будет происходить из-за изменения массы газа при $T = const$ и $V = const$. Таким образом:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{im_2}{2\mu}RT - \frac{im_1}{2\mu}RT = (m_2 - m_1)\frac{iRT}{2\mu}. \qquad (1)$$

Для первоначального и конечного состояния газа справедлив закон Менделеева-Клайперона:

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT;$$

$$p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT.$$

Отсюда следует, что

$$(p_2 - p_1)V = \frac{(m_2 - m_1)RT}{\mu}.$$

Подставляя в (1), получим:

$$\Delta U = \frac{i}{2}(p_2 - p_1)V = \frac{5}{2}(1003 - 983)\times10^2\times50;$$

$$\Delta U = 2.5 \times 10^5 \text{ Дж}.$$

6.2.12. В результате обратимого изотермического расширения $T = 300K$ азота массой $m = 531$ г давление газа уменьшается от $p_1 =$

$= 20\times10^5$ Па до $p_2 = 2\times10^5$ Па. Определить работу A, совершаемую газом при расширении и количество получаемого газом тепла Q.

Дано: $T = 300$ K, $m = 31$ г, $p_1 = 20\times10^5$ Па, $p_2 = 2\times10^5$ Па

Найти: A, Q

Решение.

Из первого начала термодинамики:

$$dQ = dU + dA,$$

где dQ - количество тепла;

dU - изменение внутренней энергии;

dA - работа системы против внешних сил, следует что:

$$dQ = dA,$$

т.к. при изотермическом процессе не происходит изменения внутренней энергии:

$$dU = 0 .$$

Работа газа при изотермическом процессе определяется так:

$$A = \frac{m}{\mu} RT\times\ln\frac{p_1}{p_2} .$$

Таким образом имеем:

$$A = \frac{531\times10^{-3}}{28\times10^{-3}} \times 8.31 \times 300 \times\ln\frac{20\times10^5}{2\times10^5} = 108\times10^3 \text{ Дж} ;$$

$$A = Q = 108 \text{ кДж}.$$

6.2.13. При адиабатическом сжатии давление воздуха было увеличено от $p_1 = 50$ кПа до $p_2 = 0.5$ МПа. Затем при неизменном объеме температура воздуха была понижена до первоначальной. Определить давление $p_3$ газа в конце процесса.

Дано: $p_1 = 50$ кПа до $p_2 = 0.5$ МПа

Найти: $p_3$

Решение.

Уравнение адиабатического процесса:

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

где p - давление газа; V - занимаемый объем;
$\gamma$ - показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i},$$

где $C_p$ - теплоемкость при p = const; $C_v$ - теплоемкость при V = const; i = 5 - число степеней свободы.

Для первого и второго состояния при адиабатическом процессе имеем:

$$p_1V_1^{\gamma} = \text{const} \qquad p_2V_2^{\gamma} = \text{const}$$

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} . \qquad (1)$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона позволяет описать любое состояние газа:

$$p_1V_1 = \nu RT_1 ,$$

где $\nu$ - количество вещества.

Так как второй процесс изохорный V = const, получим:

$$p_2V_2 = \nu RT_2 ;$$

$$p_3V_2 = \nu RT_1 ;$$

$$p_3 = \frac{\nu RT_1}{V_2} .$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для первого состояния выразим $T_1$

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} .$$

Тогда

$$p_3 = \frac{\nu R \times p_1 V_1}{V_2 \times \nu R} = \frac{p_1 V_1}{V} . \qquad (2)$$

Из уравнения (1) выразим отношение объемов:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},$$

т.е.

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} .$$

Подставим в уравнение (2):

$$p_3 = p_1 \times \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} = p_1 \times \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/i+2} ;$$

$$p_3 = 50 \times 10^3 \times \left(\frac{0.5 \times 10^6}{50 \times 10^3}\right)^{5/7} ;$$

$$p_3 = 0.26 \text{ МПа}.$$

6.2.14. В ходе цикла Карно рабочее вещество получает от нагревателя тепло $Q_1 = 300$ кДж. Температуры нагревателя и холодильника равны соответственно $T_1 = 450$ К и $T_2 = 280$ К. Определить работу А, совершаемую рабочим веществом за цикл.

Дано: $Q_1 = 300$ кДж, $T_1 = 450$ К, $T_2 = 280$ К

Найти: А

Решение.

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса определяется как:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где A - работа, совершаемая за цикл;

$Q_1$ - количество теплоты, полученное системой;

$Q_2$ - количество теплоты, отданное системой.

Кроме того, коэффициент полезного действия для цикла Карно определяется

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где $T_1$ - температура нагревателя;

$T_2$ - температура холодильника.

Таким образом получим:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Откуда

$$A = Q_1\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right);$$

$$A = 300\times10^3\left(\frac{450-280}{450}\right);$$

$$A = 113 \text{ кДж}.$$

6.2.15. Килограмм кислорода первоначально заключен в объеме $V_1 = 0.2 м^3$ под давлением $p_1 = 5\times10^5$ Па. Затем газ расширился, в результате чего объем газа стал равным $V_2 = 0.5\ м^3$, а давление стало равным $p_2 = 2\times10^5$ Па. Определить приращение энтропии газа и приращение внутренней энергии.

Дано: $V_1 = 0.2\ м^3$, $p_1 = 5\times10^5$ Па, $V_2 = 0.5\ м^3$, $p_2 = 2\times10^5$ Па

Найти: $\Delta S$

Решение.

Изменение энтропии при переходе термодинамической системы из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} .$$

Используя первое начало термодинамики, имеем

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dU+dA}{T} , \qquad (1)$$

где dQ - количество теплоты;

dU - изменение внутренней энергии;

dA - работа против внешних сил.

Изменение внутренней энергии

$$dU = \frac{im}{2\mu} RdT , \qquad (2)$$

где $i = 5$ - число степеней свободы;

dT - изменение температуры.

Применяя закон Менделеева-Клапейрона для первого и второго состояния, получим:

$$p_1V_1 = \nu RT_1 ;$$

$$p_2V_2 = \nu RT_2 ,$$

из которого находим изменение температуры и подставляем в выражение (2):

$$T_1-T_2 = \frac{p_1V_1-p_2V_2}{\nu R} = \frac{(5\times10^5\times0.2-2\times0.5\times10^5)\times32\times10^{-3}}{8.31\times1}$$

$$dT = 0,$$

т.е. процесс является изотермическим. Тогда:

$$\Delta S = \frac{A}{T};$$

A - работа при изотермическом процессе.

$$\Delta S = \frac{(m/\mu) \times RT\ln(V_2/V_1)}{T} = \frac{1 \times 8.31 \times \ln(0.5/0.2)}{32 \cdot 10^{-3}};$$

$$\Delta S = 238 \text{ Дж/К}.$$

Приложение

РИСУНКГ К ЗАДАЧАМ

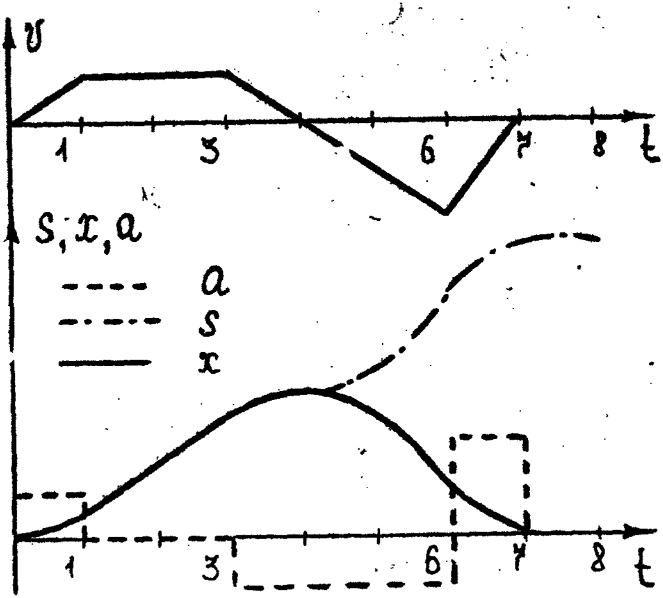


Рис.1

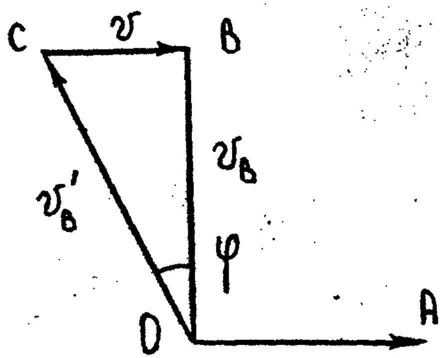


Рис.2

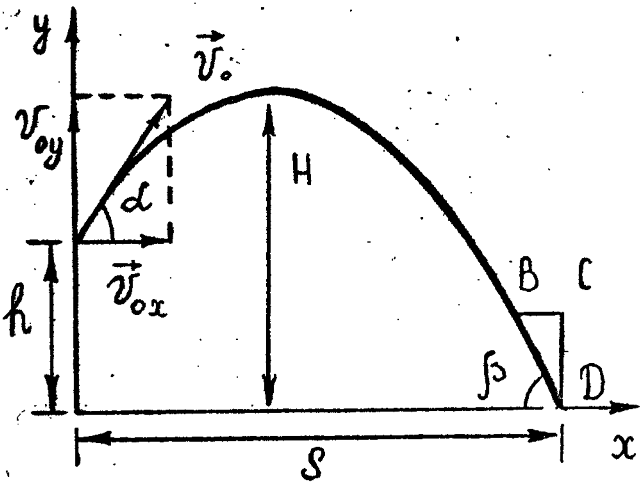


Рис.3

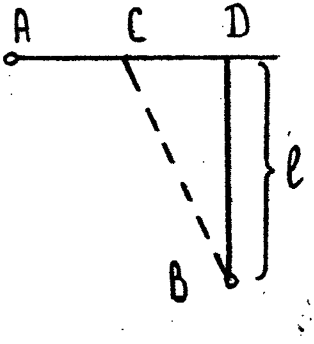


Рис.4

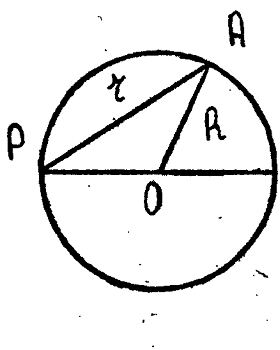


Рис.5

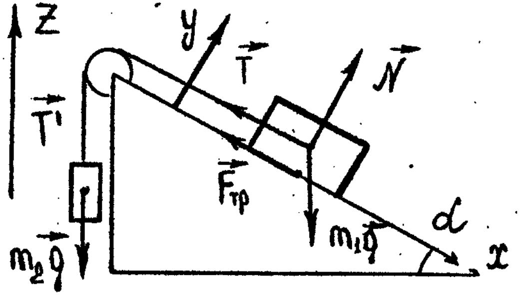


Рис.6

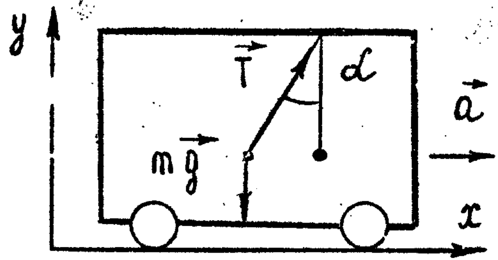


Рис.7

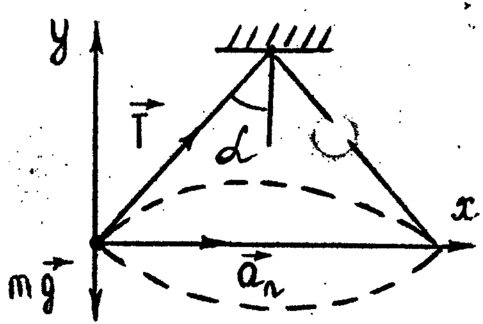


Рис.8

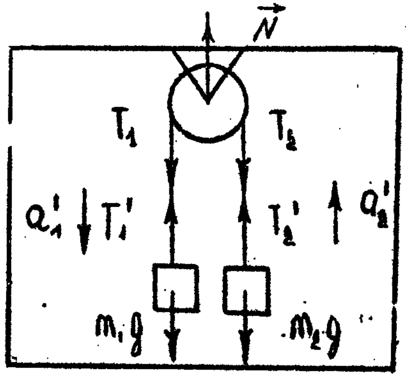


Рис.9

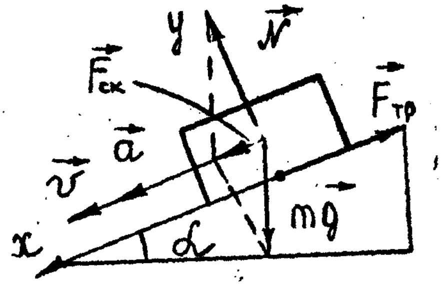


Рис.10

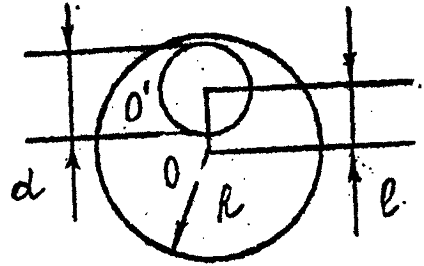


Рис. 11

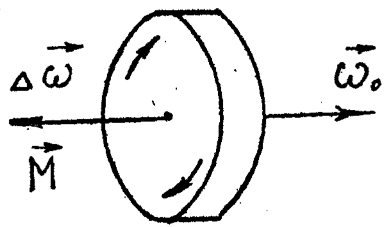


Рис. 12

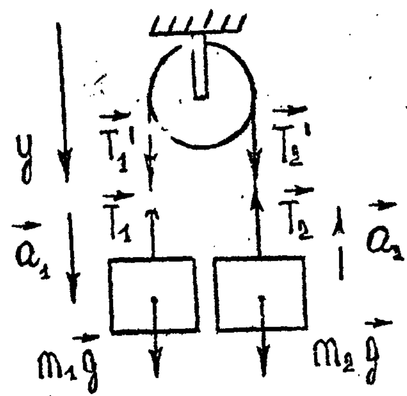


Рис.13

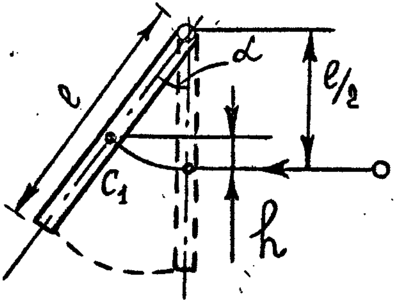


Рис. 14

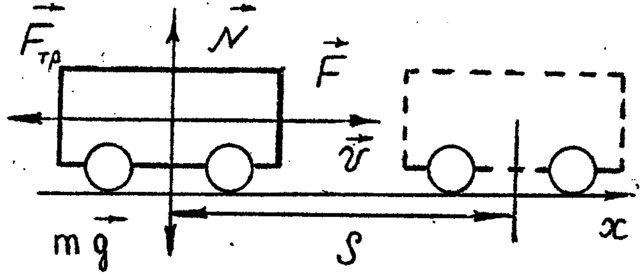


Рис. 15

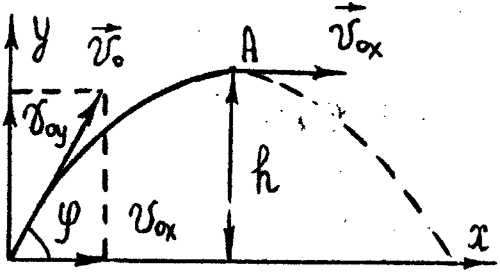


Рис. 16

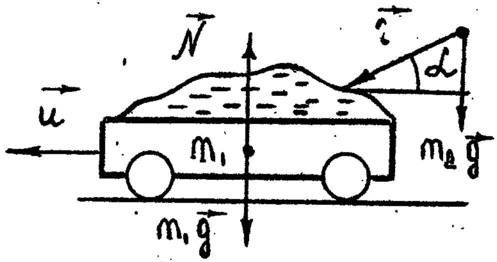


Рис. 17

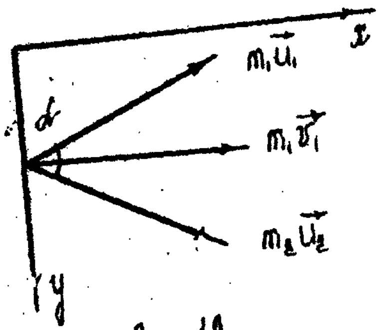


Рис. 18

## СПИСОК
## ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.: Высшая школа, 1981. - 496 с.

2. Иродов И.Е., Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общей физике. - М.: Наука, 1975. - 320 с.

3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. - М.: Наука, 1973. - 464 с.

4. Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. - М.: Высшая школа, 1986. - 256 с.

5. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики. - М.: Высшая школа, 1991. - 303 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Геннадий Николаевич Талызов
Виктор Геннадьевич Кульков
Анатолий Леонидович Суркаев

Руководство по решению задач
Физика. Часть 1
Механика и молекулярная физика
Учебное пособие

Редактор Л.П. Кузнецова
Темплан 1996., поз. N 69
Лицензия ЛР N 020251 от 31.10.1991.

Подписано в печать 2.10.96. Формат 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ.л.5,58.
Уч.-изд.л.6,29. Тираж 200. Заказ 500. Бесплатно.

Волгоградский государственный технический университет.
400066 Волгоград, пр. Ленина, 28.
Типография волгоградского государственного технического университета.
400066 Волгоград, ул. Советская, 35.