МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Г.Н. Талызов, В.Г. Кульков. А.Л. Суркаев

РУКОВОДСТВО ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ФИЗИКА. ЧАСТЬ 2
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Волгоград
1997

УДК 53 (075.8)

Рецензенты:
канд. техн. наук, доц. *В. В. Стасовская*,
канд. физ.-мат. наук, доц. *Ю. В. Енуков*

Талызов Г. Н., Кульков В. Г., Суркаев А. Л. Руководство по решению задач. Физика. Часть 2. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие/ ВолгГТУ. Волгоград, 1997. – 72 с.

ISBN 5-230-03704-0

Рассматриваются вопросы, касающиеся подробного анализа решения основных типов задач в курсе физики. Вторая часть содержит задачи электричества и магнетизма. Значительная часть материала является оригинальным. Изложение адаптировано к уровню студентов первого и второго курсов.

Рассчитано на студентов дневной и вечерней формы обучения высших технических заведений.

Ил. 24. Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного
технического университета

ISBN 5-230-03704-0

1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Мир, в котором мы живем, необычайно огромен и разнообразен. Он состоит из колоссального количества различных материальных объектов от галактик и звезд до элементарных частиц. Взаимодействие между ними приводит к настолько сложному и запутанному характеру их поведения, что, казалось бы, невозможно найти и следа каких-либо закономерностей. Однако оказывается возможным среди этого хаоса выделить наиболее общие связи, присущие всем телам, их взаимодействиям. Одной из важнейших естественных наук, изучающей такие связи и их количественные характеристики, является физика. Она определяет такие понятия, как пространство, время, материя и другие. Являясь наиболее общей наукой о природе, она служит основой для многих других. Открытие и изучение новых физических процессов позволяет глубже понять сущность проходящих в природе явлений, еще на шаг приблизиться к разгадке ее тайн. Успехи в этом направлении приводят к созданию новых технологий в промышленности, совершенствованию уже существующих, непосредственно влияет на темпы научно-технического прогресса.

Одним из важнейших понятий, которым мы будем пользоваться далее, является физическая система. Она представляется в виде совокупности некоторых физических объектов, отделенных от всех других по каким-либо признакам. Иногда бывает так, что физической системой является всего лишь один такой объект. Например, системой можно считать некоторое количество газа, находящегося в баллоне, пружину с закрепленным на ее конце грузом, заряженную частицу, движущуюся во внешнем магнитном поле и т.д

Для количественной характеристики физических объектов и процессов, в которых они участвуют, вводятся различные физические величины, позволяющие описать состояние и эволюцию системы. К ним относят массу, скорость движения, напряженность поля, величину заряда, температуру и многие другие. Совокупность физической системы и частично определенных параметров или величин составляет предмет исследования физической науки.

Система может находиться в статическом состоянии. При этом считается, что характеризующие его физические величины не изменяются. Иная ситуация соответствует изменяющимся во времени величинам. Такое состояние материи отвечает философской категории движения. Процесс изменения состояния физической системы называется физическим явлением. Обычно явление включает многие процессы, происходящие одновременно на микро- и макроуровнях. Это, например, испарение жидкости, намагничивание магнитиков, дифракция и интерференция света, механические деформации тел, сопровождающиеся выделением тепла, диффузионный массоперенос. Порой явления могут быть весьма сложными. Исследование таких физических явлений может привести либо к представлению их в виде совокупности более простых, либо к установлению новых, ранее неизвестных закономерностей.

Изучать различные явления можно, используя необходимые устойчивые связи между определенными физическими величинами. В этом состоит определение физического закона. Например, закон Кулона выражает связь между величинами двух точечных зарядов с силой их взаимодействия; закон Гука связывает относительную деформацию тела с механическим напряжением, действующим на него; закон преломления связывает направления падающего и преломленного светового луча с характеристикой среды - показателем преломления.

Применение физических законов требует соблюдения определенной осторожности, поскольку каждый из них справедлив лишь в определенных условиях, при несоблюдении которых он может оказаться слишком неточным или даже ошибочным. Скажем, законы классической механики с высокой точностью описывают поведение микроскопических тел, состоящих из большого количества микрочастиц. При переходе к описанию движения отдельных молекул или атомов возникают определенные затруднения, в результате чего описание становится менее точным. И уж совсем нельзя их применять для описания квантовых объектов, таких как электроны. Рассмотрение движения классических объектов со скоростями, сравнимыми со скоростью света, требует использования законов релятивистской теории. Поэтому, применяя определенный физический закон, всякий раз необходимо проверять условия задачи и следить за тем, чтобы они соответствовали ему. Поведение любой реальной системы физических объектов является очень сложным, поскольку факторов, влияющих на нее, довольно много, среди которых некоторые играют определяющую роль. Естественно, что невозможно учесть все факторы, так как одни из них слишком слабые, другие имеют случайный, хаотический характер. В связи с этим важно уметь отбрасывать их и оставлять для учета только наиболее значимые и существенные по величине. В результате реальная физическая система с невообразимой сложностью ее поведения заменяется идеализированной, в определенном смысле абстрагированной ее моделью. Получив сведения о поведении такой модели, можно в дальнейшем по мере необходимости уточнять результаты, учитывая менее существенные факторы, действующие внутри системы или вне ее. Таким образом, любая четко сформулированная физическая задача является идеализацией реальности. В физике принято пользоваться идеальными моделями объектов и процессов. Такими являются, например, материальная точка, идеальный газ, изотермический процесс и т.д. Необходимо уметь выделять главные стороны любого явления.

Изучение физической науки следует рассматривать как процесс, состоящий из трех этапов. Первый заключается в изучении теоретических сведений, в понимании и запоминании формул, знании способов их получения, уяснении основных физических законов. Второй этап предусматривает умение использовать полученные знания при решении конкретных задач. Хорошо известна ситуация, когда человек, казалось бы, хорошо знающий теорию, совсем не может решать задачи, то есть применять ее на практике. Решение конкретных физических задач является необходимой практической основой при изучении курса физики. Оно способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе, учит анализировать изучаемые явления, выделять главные факторы, обуславливающие то или иное явление, отвлекаясь от случайных и несущественных деталей. Благодаря этому решение задач приближается к моделям научного физического исследования. Никакое количество материала, сколь большим бы оно ни было, не заменит настойчивых усилий, прилагаемых для решения физических задач, и тех навыков, которые с этим приходят. Третьим этапом можно считать умение проводить физический эксперимент и получать из него необходимые сведения. Эта цель достигается при выполнении лабораторных работ.

Физические задачи могут быть экспериментальными или теоретическими. Последние, в свою очередь, можно разделить на две категории непоставленные и поставленные. Непоставленной называется задача, в которой не обеспечена совокупность необходимых исходных данных, за исключением табличных величин, или же не проведена ее идеализация. В противном случае говорят о поставленной задаче, которую можно еще разделять и по роду рассматриваемых явлений.

Среди поставленных задач можно выделить четыре основных класса:

1. Элементарные задачи. Сюда входят те задачи, для решения которых требуется использование одного физического закона.

2. Стандартные задачи. Они требуют использования нескольких обычных, часто используемых приемов решения и физических законов.

3. Нестандартные задачи. В этом случае кроме обычных законов и методов решение требует применения дополнительных нестандартных приемов, которые могут быть основаны, например, на свойствах симметрии или некоторых других отличительных свойствах системы.

4. Оригинальные задачи. Это задачи с определяющей ролью особых приемов решения, значительной степенью интуиции. Для решения таких задач нужны определенные навыки, достаточно широкий физический кругозор, умение проводить аналогию между явлениями из разных разделов физики и математики. Бывает так, что стандартная или нестандартная задача может иметь оригинальное решение.

Для того, чтобы научиться быстро и хорошо решать задачи, необходимо прежде всего владеть определенным объемом теоретического материала. С этой целью студент должен изучить соответствующие разделы конспектов лекций и учебника. Не следует ограничиваться использованием одного лишь лекционного материала. Наибольший объем знаний можно получить работая с учебниками, которых в настоящее время имеется достаточно много и написаны они на разном уровне. Лекция же выполняет лишь направляющую и разъясняющую главные моменты функцию. Она указывает направление в отборе материала для изучения.

Вторым фактором успешного решения задач является пользование соответствующими методиками. Недооценка его ведет к тому, что решение, происходящее на интуитивном уровне, не всегда является оптимальным. Отсюда и неизбежные недостатки: неполнота решения, большие затраты времени, частые затруднения, невозможность классификации задач и физических явлений, связанных с ними, невозможность прослеживания связей с другими задачами, отсутствие физических и математических аналогий. Все это указывает на необходимость владения общими методами решения задач.

Основными этапами решения любой физической задачи являются следующие: физический, математический и анализ решения.

Сущность физического этапа заключается в том, чтобы, используя условие задачи, определить, что и как нужно сделать, чтобы найти путь ее решения. Данный этап может включать в себя следующие действия:

1. Ознакомление с условием задачи.

2. Осмысление известных и искомых величин.

3. Изображение рисунка со всеми необходимыми обозначениями.

4. Определение качественной характеристики задачи. Установление ее сходства и отличия от других, сущности, рода явлений, к которому она относится.

5. Выбор физической системы.

6. Определение качественных характеристик системы. Пренебрежение несущественными деталями, идеализация физической системы.

7. Идеализация физических процессов.

8. Выбор способа описания процесса, например, выбор системы координат, использование симметрии, проведение аналогии с другими уже решенными задачами.

9. Установление количественных соотношений между физическими величинами. Использование необходимых физических законов, выбор системы единиц измерения.

10. Запись замкнутой системы уравнений. Большое значение на этом этапе имеют наблюдательность, умение абстрагироваться, навыки, приобретенные ранее в процессе решения других задач.

Итак, физический этап завершен, написаны все необходимые соотношения. Теперь необходимо, используя их, получить численный результат. Такую цель преследует математический этап решения физической задачи, который включает в себя следующие действия:

1. Выражение искомых величин через известные в общем виде. Здесь решающее значение приобретают математические методы и операции такие, как решение системы линейных уравнений, решение дифференциальных уравнений, использование аппарата векторного анализа, дифференцирование и интегрирование функций, разложение в ряды, применение методов теории функций комплексного переменного и т.д.

2. Подстановка в формулы известных значений и получение численного результата. В зависимости от требуемой точности и имеющегося технического оснащения здесь могут использоваться математические таблицы, счетная линейка, калькулятор, электронно-вычислительные машины.

Последним этапом является анализ решения, который призван оценить удовлетворительность полученного результата. На этом этапе обычно осуществляются следующие действия:

1. Проверка размерности физической величины. Она должна совпадать с общепринятой в соответствующей системе единиц. Анализ размерности позволяет обнаружить грубые ошибки в решении. Например, недопустимо появление размерных величин в качестве аргументов таких функций, как логарифм, экспонента, тригонометрические функции и др. Недопустимы также операции сложения и вычитания величин, имеющих разные размерности.

2. Устранение математических результатов, являющихся абстракцией с точки зрения физики. К этой категории относятся бесконечно большие и малые величины, ступенчатые функции (типа функции Хевисайда), сингулярные функции (типа функции Дирака).

3. Выбор одного физически возможного результата из нескольких математически дозволенных. Например, если при нахождении объема газа из решения квадратного уравнения получаются две величины, одна из которых положительная, а другая отрицательная, то вторую следует отбросить, как не имеющую физического смысла.

4. Оценка физической реальности результата. Например, следует признать нереальными такие результаты, когда скорость пули составляет несколько сантиметров в секунду, скорость частицы превышает скорость света, работа электрического тока в цепи батарейки равна нескольким мегаджоулям и др.

Каждый этап не обязательно должен включать все перечисленные действия. Их необходимость в значительной мере определяется спецификой и сложностью решаемой задачи.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

2.1. Основные законы и формулы

1. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где q_1, q_2 – электрические заряды;

ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ ф/м - электрическая постоянная;

r – расстояние между зарядами.

2. Напряженность электрического поля:

$$E = F/q.$$

3. Напряженность поля, заряженная бесконечно длинной нитью:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a},$$

где τ - q/l линейная плотность заряда на нити;

a - расстояние от нити.

4. Напряженность поля, заряженная бесконечно протяженной плоскостью:

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где δ - q/S поверхностная плотность заряда на плоскости.

5. Напряженность поля проводящей заряженной сферы радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

а) если $r < R$, то $E=0$,

б) если $r = R$, то $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$,

в) если $r > R$, то $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$.

6. Электричество и магнетизм.

Емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R - r},$$

где r радиус внутренней и R - радиус внешней сферы.

В частном случае, когда $R=\infty$,

$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$ – емкость уединенного шара.

Емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln R/r},$$

где L высота коаксиальных цилиндров; r и R - радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

Емкость системы конденсаторов равна:

при параллельном соединении конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots;$$

при последовательном соединении

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

Энергия уединенного заряженного проводника может быть найдена по одной из следующих трех формул:

$$W = \frac{1}{2}qU, \quad W = \frac{1}{2}CU^2, \quad W = \frac{q^3}{2C};$$

в частном случае плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2} = \frac{\delta^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где S - площадь каждой пластины;

δ -- поверхностная плотность заряда на пластинах;

U разность потенциалов между пластинами.

Величина $$W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

2.2. *Задачи*

2.2.1. *Найти суммарный заряд q атомных ядер меди, содержащихся в 1 см^3.*

Дано: v=1 см^3

Найти: Q=?

Суммарный заряд атомных ядер Q определяется произведением количества ядер N, числом зарядов в ядре т.е. числом n_p - протонов и величиной заряда протона q_p:

$$Q = N\, n_p\, q_p.$$

Решение

Согласно определению, количество вещества есть

$$\upsilon = N / N_a,$$

где N – количество частиц (ядер меди);

N_a - число Авагадро.

С другой стороны $\upsilon = m / \mu$,

где m – масса вещества; μ молярная масса.

Следовательно, количество атомных ядер меди, находящихся в 1 см^3 есть

$$N = N_a \frac{m}{\mu} = \frac{N_a \rho v}{\mu},$$

где ρ - плотность меди;

v – объем меди.

Таким образом:

$$Q = n_p q_p \frac{N_a \rho v}{\mu}.$$

Из таблицы Менделеева определяем μ и n_p, а заряд протона равен заряду электрона:

$$Q = 29 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times \frac{6{,}022 \times 10^{23} \times 8{,}93 \times 10^{3} \times 10^{-6}}{64 \times 10^{-3}} = 3{,}9 \times 10^{5} \text{ Кл}.$$

2.2.2. *В вершинах правильного шестиугольника со стороной а помещаются точечные заряды одинаковой величины q. Найти потенциал φ и напряженность поля $\vec{E}$ в центре шестиугольника при условии, что а) знак всех зарядов одинаков, б) знак соседних зарядов противоположен.*

Дано: a,
$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6$

Найти: $\varphi, \vec{E} = ?$

Решение

Согласно принципу суперпозиции применительно к потенциалу имеем

$$\varphi_{рез} = \sum_i \varphi i$$

т.е. результирующий потенциал $\varphi_{рез}$ в некоторой точке равен алгебраической сумме всех потенциалов φ i в данной точке. Потенциал точечного заряда определяется

$$\varphi i = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i},$$

где ε диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$ вакуум;
r_i расстояние от центра заряда q_i до точки определения потенциала.

Так как шестиугольник правильный, то r=a. Следовательно, имеем

$$\varphi_{рез} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{6q}{a}.$$

Для второго случая $\varphi_{рез} = 0$, так как количество отрицательных зарядов равно количеству положительных зарядов. Величины зарядов равны расстоянию до рассматриваемой точки также равны, следовательно, и противоположные по знаку потенциалы.

Для определения напряженности $\vec{E}$ используем принцип суперпозиции:

$$\vec{E}_p = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i ,$$

то есть результирующая напряженность поля, созданная системой зарядов, равна геометрической сумме всех напряженностей.

Используем рисунки:

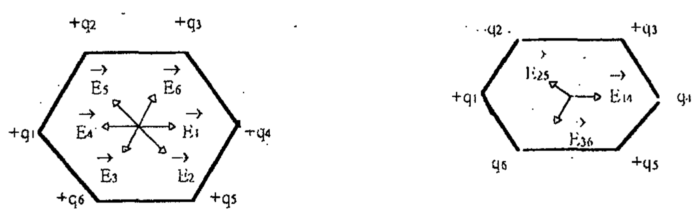


Рис.2.1

В силу симметрии для случая

а) $\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6 = 0$;

б) $\vec{E}_p = \vec{E}_{14} + \vec{E}_{25} + \vec{E}_{36} = 0$,

где E_{14} , E_{25} , E_{36} – соответственно, результирующая напряженность поля, созданная противоположными зарядами q_1 и q_4, q_2 и q_5 , q_3 и q_6.

2.2.3. *Работа сил поля бесконечно заряженной нити по перемещению заряда q=1 мКл из точки, находящейся на расстоянии r_1= 5 см от нити до r_2=2 см в перпендикулярном направлении, равна A=60 мкДж Определить линейную плотность заряженной нити.*

Дано: q=1 мКл,

r_1= 5 см,

r_2=2 см,

А=60 мкДж,

Найти: τ = ?

Решение

Работа, совершаемая силами электростатического поля по перемещению точечного заряда из точки 1 в точку 2, определяется как

$$\Delta A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Связь между напряженностью и потенциалами электрического поля, обладающей осевой симметрией, представляется формулой

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

Используя выражение, определяющее напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной нитью на расстоянии r от нее,

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

где τ – линейная плотность.

Имеем

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} qE\,dr = -\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}dr = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

откуда

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 A}{q\ln{r_2}/{r_1}} = \frac{2\times3{,}14\times8{,}85\times10^{-12}\times60\times10^{-6}}{10^{-9}\times0{,}9} = 3{,}7\times10^{-12}\ \text{Кл}/\text{м}.$$

2.2.4. *На тонком стержне длиной l=15 см равномерно распределен заряд. На продолжении оси стержня располагается точечный заряд q_2 = 30 мКл на расстоянии r=10 см от его конца. Сила взаимодействия заряда со стержнем F=6 мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.*

Дано: l=15 см,
q_2 = 30 мКл,
r=10 см,
F=6 мкН.

Найти: τ = ?

Решение

Согласно определению линейная плотность есть

$$\tau = q/l$$

где q – заряд; l – длина линейного стержня.

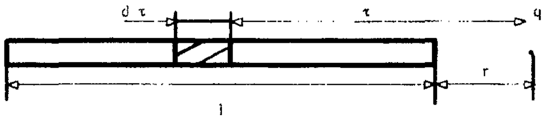


Рис.2.2

Разобьем стержень на бесконечно малые участки dx с зарядом dq = τ dx. В этом случае сила взаимодействия между точечным зарядом q_1 и зарядом dq будет определяться законом Кулона т.е.

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \tau dx}{x^2}$$

Проинтегрируем данное выражение в пределах от r до r+l

$$F = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{r+l}\frac{dx}{x^2} = -\frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{x}\right|_r^{r+l} = -\frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+l}-\frac{1}{r}\right) = \frac{q_1\tau l}{4\pi\varepsilon_0 r(r+l)}$$

Откуда линейная плотность τ

$$\tau = \frac{4\pi\varepsilon_0 r(r+l)F}{q_1 l} = \frac{4\pi\times 8{,}85\times 10^{-12}\times 0{,}1(0{,}1+0{,}15)\times 6\times 10^{-6}}{30\times 10^{-9}\times 0{,}15} =$$

$$= 3{,}7\times 10^{-9}\ Кл/м = 3{,}7н\ Кл$$

2.2.5. *По тонкой нити, изогнутой как показано на рисунке, равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ = 10 нКл / м. Определить напряженность поля в точке О, если радиус полукольца R=5 см, длина участка AB=15 см*

Дано: τ = 10 нКл / м,

R=5 см,

$l_{ав}$ = 15 см

Найти: E_0 = ?

Решение

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля E_0 в точке О определяется геометрической суммой напряженностей полей, созданной полуокружностью АДС, $\vec{E}_{адс}$ и прямолинейно тонкой нитью $\vec{E}_{ав}$.

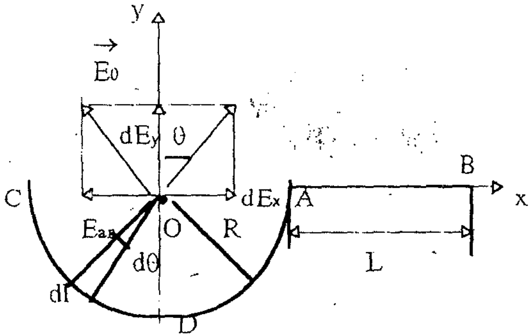


Рис.2.3

Выберем соответствующим образом оси координат. На криволинейном участке нити выделим бесконечно малый элемент длины dl. Заряд данного участка можно представить точечным, следовательно, данный заряд определяется

$$dq = \tau\, dl,$$

где τ линейная плотность заряда.

Определим напряженность поля, создаваемое в точке O зарядом элемента дуги dl:

$$\vec{dE} = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1)$$

где r радиус-вектор от элемента dl до точки O. Представим вектор $\vec{dE}$ через проекции на соответствующие оси координат (рис.2.3.):

$$\vec{dE} = \vec{i}\, dE_x + \vec{j}\, dE_y ,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные орты.

Проинтегрируем данное выражение вдоль дуги l :

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l d\vec{E}_x + \vec{j}\int_l d\vec{E}y .$$

В силу симметрии $\int\limits_l dE_x = 0$, следовательно,

$$\vec{E} = j\int\limits_l dE_y .$$

Выразим проекцию вектора $d\vec{E}_y$ через вектор $d\vec{E}$, т.е.

$$dE_y = dE\cos\theta .$$

Тогда, используя выражение (1), имеем

$$dE_y = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

так как r=R=const, а dl= R dθ, получаем

$$dE_y = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta$$

Проинтегрируем данное выражение, причем, будем иметь ввиду, что угол θ меняется в пределах $0 \le \theta \le \pi/2$, тогда

$$E_{сд} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} ,$$

где $E_{сд}$ – напряженность поля, создаваемое дугой СД полукольца АС. В силу симметрии имеем

$$\vec{E}_{сд} = \vec{E}_{ад} .$$

Тогда

$$\vec{E}_{ac} = 2\vec{E}_{сд} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{\vec{r}}{r} .$$

Для определения напряженности поля $\vec{E}_{ав}$, создаваемое прямолинейным участком тонкой нити АВ, есть смысл воспользоваться результатом предыдущей задачи, а именно

$$F = \frac{q_1 \sum L}{4\pi\varepsilon_0 R(R+L)} ,$$

где F – сила взаимодействия заряда q_1 с тонкой заряженной нитью τ - линейной плотностью; R- расстояние от точки О до края участка нити АВ. L=AB - длина нити.

Тогда напряженность поля $\vec{E}_{ав}$, создаваемое нитью в точке О, имеет вид

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\text{, следовательно,}$$

$$E_{ав} = \frac{\tau L}{4\pi\varepsilon_0 R(R+L)}.$$

Используя теорему Пифагора для нахождения напряженности поля $\vec{E}_0$, имеем

$$E_0 = \sqrt{E_{ac}^2 + E_{ab}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2 + \left(\frac{\tau L}{4\pi\varepsilon_0 R(R+L)}\right)^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{(2)^2 + \left(\frac{L}{R}+L\right)^2} =$$

$$= \frac{10\times10^{-9}}{4\pi\times8{,}85\times10^{-12}\times5\times10^{-2}}\sqrt{4+\left(\frac{15\times10^{-2}}{(5+15)\times10^{-12}}\right)} = 3{,}92\times10^{3}\ В/н.$$

2.2.6. *Два шара диаметром d_1= 0,20 м и диаметром d_2= 0,6 м находятся в некотором объеме с керосином, диэлектрическая проницаемость которого ε =2. Расстояние между центрами шаров l=1,5 м.*

Потенциал первого шара $\overline{\varphi_1}$ = 200 В, второго $\overline{\varphi_2}$ = -75 В относительно Земли. Шары соединяются проводником, который затем удаляется. Определить напряженность поля и потенциал относительно Земли в точке А посередине между центрами шаров.

Дано: d_1 = 0,20 м,
d_2= 0,6 м,
ε =2,
l=1,5 м,
$\overline{\varphi_1}$ = 200 В,
$\overline{\varphi_2}$ = -75 В.

Найти: $\vec{E}_p$ = ?
$\overline{\varphi_p}$ = ?

Решение

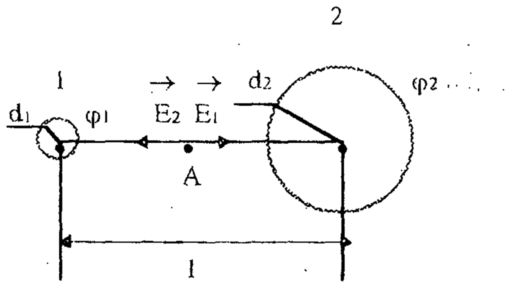


Рис.2.4

Напряженность поля $\vec{E}$ заряженного шара определяется

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Так как точка A расположена на прямой между центрами шаров, то вектора напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ первого и второго шара будут коллениарны, справедливо, используя принцип суперпозиции. результирующее поле будет определяться суммой полей:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Электрическая емкость шара определяется

$C_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1$, $C_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2$

где C_1, C_2 и R_1, R_2 соответственно емкости и радиусы шаров.

До соединения шаров проводником их заряды можно определить выражениями:

$q_1 = \overline{\varphi_1} C_1 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 \overline{\varphi_1}$, $q_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2 \overline{\varphi_2}$

Потенциал в точке A относительно Земли поля, создаваемого первым шаром, есть:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{l/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1\overline{\varphi_1}}{l/2} = \frac{2R_1\overline{\varphi_1}}{\varepsilon l}.$$

Потенциал в точке А относительно Земли поля, второго шара аналогичен:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{l/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0 R_2\overline{\varphi_2}}{l/2} = \frac{2R_2\overline{\varphi_2}}{\varepsilon l}.$$

Общий потенциал будет определяться их суммой:

$$\varphi_{об} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon l}\left(R_1\overline{\varphi_1} + R_2\overline{\varphi_2}\right).$$

После того, как шары были соединены проводником, их потенциалы относительно Земли выровнялись, а разность потенциалов стала равна нулю. Произошло перераспределение зарядов причем пропорционально их емкостям, т.е. имеем:

$$q_1' = \frac{q}{C_1 + C_2}C_1; \qquad q_2' = \frac{q}{C_1 + C_2}C_2,$$

где q_1' и q_2' – соответствуют заряду шаров после соединения их проводником;

q – общий заряд, определяемый суммой зарядов до соединения проводником:

$$q = q_1 + q_2.$$

Тогда напряженность поля в точке А заряда первого шара после перераспределения равна

$$E_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1'}{r^2} = \frac{4qC_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2(C_1 + C_2)} = \frac{(q_1 + q_2)C_1}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2(C_1 + C_2)} =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R_1\overline{\varphi_1} + R_2\overline{\varphi_2}\right)4\pi\varepsilon_0 R_1}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)l^2} = \frac{4\left(R_1\overline{\varphi_1} + R_2\overline{\varphi_2}\right)R_1}{l^2(R_1 + R_2)}.$$

Напряженность поля второго шара:

$$E_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2'}{r^2} = \frac{4qC_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2(C_1 + C_2)} = \frac{(q_1 + q_2)C_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2(C_1 + C_2)} =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R_1\overline{\varphi_1} + R_2\overline{\varphi_2}\right)4\pi\varepsilon_0 R_2 4}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)l^2} = \frac{4\left(R_1\overline{\varphi_1} + R_2\overline{\varphi_2}\right)R_2}{l^2(R_1 + R_2)}.$$

Таким образом ,

$$E_2' = \frac{4(200 \times 0{,}1 - 0{,}3 \times 75)0{,}3}{(0{,}1 + 0{,}3) \times 1{,}5^2} = -3{,}3 \text{ В/м};$$

$$E_1' = \frac{4(200 \times 0{,}1 - 0{,}3 \times 75)0{,}1}{(0{,}1 + 0{,}3) \times 1{,}5^2} = -1{,}1 \text{ В/м}.$$

Знак " – " указывает, что заряды на шарах отрицательны, а напряжение полей направлены в противоположные стороны.

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1' - \vec{E}_2' = 2{,}2 \text{ В/м}.$$

Потенциалы в точке А полей обоих зарядов складываются алгебраически:

$$\varphi_p = \varphi_1' + \varphi_2' = \frac{q_1' + q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \, l/2} = (2{,}47 + 0{,}82) = 3{,}92 \text{ В}.$$

2.2.7. *Два шара массой m=1 г каждый подвешены на нитях, верхние концы соединены в одной точке. Длина каждой нити l=10 см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы они разошлись на угол α=60°?*

Дано: m=1 г,
l=10 см,
α=60°.
Найти: q =?

Решение

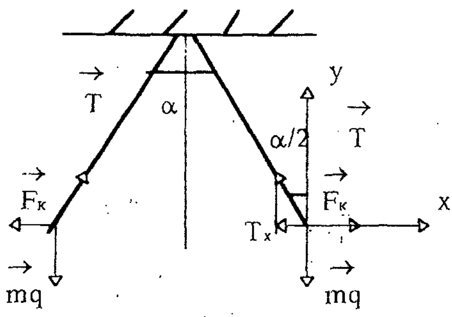


Рис.2.5

На каждый шарик действует сила тяжести $\vec{F}_т$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила кулоновского отталкивания $\vec{F}_к$. Выберем соответствующим образом оси координат.

Согласно второму закону Ньютона имеем

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \text{ , т.е.}$$

$$\vec{F}_к + \vec{F}_m + \vec{T} = 0 .$$

Выразим проекции на оси координат

$$\begin{aligned} &\text{ось } y: \\ &\text{ось } x: \end{aligned} \begin{cases} T\cos\alpha/2 - mg = 0, \\ \quad T_x - F_к = 0 \text{ ,} \end{cases}$$

где T_x - составляющая силы натяжения на ось x,

$T_x = mq\,tg\ \alpha/2$ - следует из треугольника.

$$F_к = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \text{ — закон Кулона,}$$

где r расстояние между шариками

$$\frac{r}{2l} = \sin\alpha/2 \ .$$

Таким образом имеем $\quad mq\,tg\,\alpha/2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{r^2}$,

$$mq\,tg\,\alpha/2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4l^2\sin^2(\alpha/2)} \ ,$$

$$q = \sqrt{16\,mg\,\pi\varepsilon_0\,l^2 tg(\alpha/2)\sin^2(\alpha/2)} \ ,$$

$$q = \sqrt{16\times10^{-3}\times10\times3{,}14\times8{,}85\times10^{-12}\times10^{-2}\times0{,}57\times0{,}25} = 79\text{ н Кл} .$$

2.2.8. *С какой силой, приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда δ =3 мкКл / м^2?*

Дано: δ = 3 мкКл / м^2 .

Найти: F= ?

Решение

Считаем, что одна пластина, несущая некоторый заряд q находится в электростатическом поле другой пластины. Напряженность поля бесконечной пластины определяется как

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Сила, действующая на заряд, находящийся в поле,

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Согласно определению, поверхностная плотность заряда есть

$$\delta = \frac{q}{S},$$

тогда имеем:

$$F = qE = \delta S E = \frac{\delta^2 S}{2\varepsilon_0} = \frac{9 \times 10^{-12}}{2 \times 8{,}85 \times 10^{-12}} = 0{,}5\ \text{Н/м}^2$$

$\varepsilon = 1$ и $S = 1$ м^2.

2.2.9. *Четыре одинаковых капли ртути, заряженных до потенциала $\varphi = 10$ В, сливаются в одну. Каков потенциал φ_1 образовавшейся капли?*

Дано: $\varphi = 10$ В.

Найти: $\varphi_1 = ?$

Решение

Потенциал капли до сливания в единую равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

где q – заряд капли;

r – радиус капли.

После сливания четырех капель в одну заряд последней увеличивается в 4 раза и выражение потенциала имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{R},$$

где R – радиус большой капли, т.е.

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0 4\varphi r}{R} = \frac{4\varphi r}{R}.$$

Объем большой капли станет равен четырем объемам маленьких капель:

$$V_1 = 4\,V\,,$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Откуда $\dfrac{R^3}{r^3} = 4$, $\left(\dfrac{R}{r}\right) = \sqrt[3]{4}$.

Таким образом имеем

$$\varphi_1 = 4\varphi\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{4\varphi}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\times 10}{\sqrt[3]{4}} = 25{,}2\,\text{В}\,.$$

2.2.10. *Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда q_0 = 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии r_0 =1 см от поверхности шара радиусом R=1 см с поверхностной плотностью заряда δ = 10 мкКл / м^2 ?*

Дано: q_0 = 20 нКл,

r_0 =1 см,

R=1 см ,

δ = 10 мкКл / м^2 .

Найти: A = ?

Решение

Работа по перемещению заряда определяется:

$$A = \int\left(\vec{F}\,d\vec{r}\right)\,.$$

Напряженность поля шара:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}\,, \qquad \vec{F} = q_0\,\vec{E}\,,$$

где q заряд шара, $\vec{r}$ расстояние от центра шара до точки. Тогда имеем

$$A = \int_{\infty}^{a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}\,dr\,,$$

где $a = R + r_0$ · предел интегрирования.

Согласно определению поверхностная плотность заряда есть

$$\delta = \frac{q}{S} ,$$

S - площадь поверхности шара

$$q = \delta\, 4\, \pi\, R^2 .$$

Тогда

$$A = \frac{q_0 \delta 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0} = \int\limits_{\infty}^{a} \frac{dr}{r} = -\frac{q_0 \delta R^2}{\varepsilon_0 (R + r_0)}\Bigg|_{\infty}^{a} ,$$

$$A = \frac{20 \times 10^{-9} \times 10^{-4} \times 10 \times 10^{-6}}{8{,}85 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-2}} = 113 \text{ мк Дж}.$$

Работа производится против сил поля.

2.2.11. *Электрон с начальной скоростью $v_0 = 3 \times 10^6$ м / с влетел в однородное электронное поле напряженностью E=150 В / м Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найти: 1) силу, действующую на электрон, 2) ускорение, приобретаемое электроном, 3) скорость электрона через $t = 0{,}1 \times 10^{-6}$ с.*

Дано: $v_0 = 3 \times 10^6$ м / с,

E=150 В / м,

$t = 0{,}1 \times 10^{-6}$ с.

Найти: $\vec{F}$ = ?

a = ?

v_p = ?

Решение

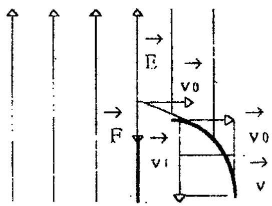


Рис.2.6

Со стороны электрического поля на электрон действует сила

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

где e = 1,6 x 10^{-19} Кл – заряд электронов.

$$\vec{F} = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 150 = 24 \times 10^{-18}\ \text{Н}.$$

Используя второй закон Ньютона, имеем:

$$a = F / m = e E / m = 2{,}6 \times 10^{13}\ \text{м} / \text{с}^2.$$

Вдоль оси y, начальная скорость у электрона равна нулю, тогда

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{v_1}{t}.$$

Для нахождения результирующей скорости используем теорему Пифагора:

$$v_p = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v_0^2 + (a\,t)^2} = \sqrt{\left(3 \times 10^6\right)^2 + \left(2{,}6 \times 10^{13} \times 0{,}1 \times 10^{-6}\right)^2} =$$

$$= 4 \times 10^6\ \text{м/с}$$

2.2.12. *Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U_0=300 В, при прохождении через незаряженный плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам дает светящееся пятно на флуоресцирующем экране, расположенном на расстоянии x=10 см от края конденсатора. При наличии заряда на пластинах конденсатора пятно на экране смещается на величину y=3 см. Расстояние между пластинами d=1,5 см, длина пластин l=5 см. Найти разность потенциалов U, приложенную к пластинам конденсатора.*

Дано: U_0=300 В,
x=10 см,
y=3 см,
d=1,5 см,
l=5 см.
Найти: U = ?

Решение

Будем считать, что вся работа по ускорению электронного пучка полем идет на сообщение ему кинетической энергии т.е.

$$l\,U_0 = \frac{m\upsilon_0^2}{2};$$

где e – заряд электрона; m – масса; υ – скорость электрона.

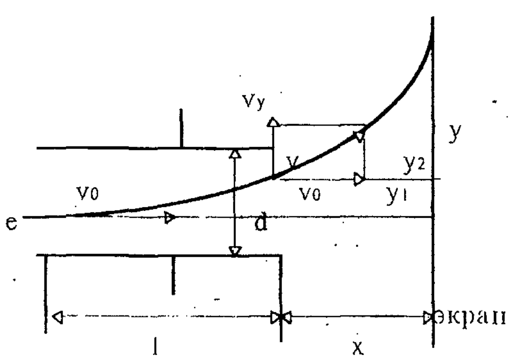


Рис.2.7

Проекция всех сил, действующих на электроны на ось x, равна нулю, следовательно, вдоль оси x движение электронов равномерное, то есть время движения

$$t = \frac{l}{\upsilon_0} = \frac{l}{\sqrt{2eU_0/m}} \quad , \qquad (1)$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2eE}{m}} \; .$$

Электрическое поле конденсатора перемещает пучок электронов вдоль оси y равноускоренно, так как на электрон действует электрическая сила Fy. Тогда согласно II закону Ньютона имеем:

$$F_y = eE = \frac{eU}{d} = ma ,$$

где $E = \dfrac{U}{d}$ напряженность поля конденсатора; U разность потенциалов на пластинах; d - расстояние между пластинами; m – масса электрона; a – ускорение.

Таким образом: $$U = \frac{mad}{e} \; . \qquad (2)$$

При прохождении через конденсатор электроны смещаются вдоль оси y на некоторую величину y_1.

В случае равноускоренного движения имеем:

$$y_1 = v_{0y}t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2},$$

так как $v_{0y} = 0$, но $a = \frac{v_y - v_{0y}}{t} = \frac{v_y}{t}$, (3)

$$v_1 = \frac{v_y t}{2}.$$

Рассмотрим два треугольника: один, образованный векторами скоростей v_y и v_0, другой – катетами x и y_2. Эти треугольники подобны.

Тогда получаем

$$\frac{y_2}{v_y} = \frac{x}{v_0}; \qquad y_2 = \frac{v_y x}{v_0}.$$

Но $y = y_1 + y_2$, следовательно,

$$y = \frac{v_y t}{2} + \frac{v_y x}{v_0}.$$

Откуда $v_y = \frac{y}{(t/2 + x/v_0)} = \frac{2y v_0}{2x + t v_0}$.

Таким образом, используя выражения (1) и (2), (3), имеем

$$U = \frac{md}{e}a = \frac{md}{e}\frac{v_y}{t} = \frac{md}{e}\frac{2y v_0}{(2x + t v_0)t} =$$

$$= \frac{2md\,y\sqrt{2eU_0/m}}{e\left(2x + \frac{l}{\sqrt{2eU_0/m}}\sqrt{\frac{2eU_0}{m}}\right)\frac{l}{\sqrt{2eU_0/m}}} = \frac{4y\,d\,U_0}{l(2x + l)} =$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 10^{-2} \times 1{,}5 \times 10^{-2} \times 300}{5 \times 10^{-2}\left(2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}\right)} = 43{,}2\ \text{В}.$$

2.2.13. *Найти разность потенциалов между обкладками конденсаторов, а также между точками в и е в схеме.*

Решение

Разделим схему на участки ab, bd, de, ea, которые соединены между собой последовательно.

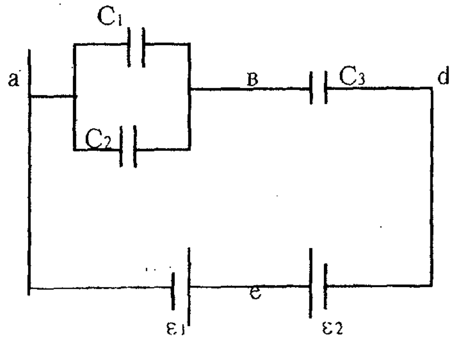


Рис.2.8

Будем считать, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Напряжение на всей батареи конденсаторов между a и d равно

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = U_{ab} + U_{bd} \qquad (1)$$

Конденсаторы C_1 и C_2 соединены параллельно, а C_3 - подключен к ним последовательно, следовательно, согласно закону сохранения заряда, выполняется равенство

$$q_1 + q_2 = q_3. \qquad (2)$$

Из определения электроемкости имеем

$$C_1 = \frac{q_1}{U_{ab}}; \qquad C_2 = \frac{q_2}{U_{ab}}; \qquad C_3 = \frac{q_3}{U_{bd}}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1–3), находим

$$U_{ab} = \frac{C_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{C_1 + C_2 + C_3} \qquad U_{bd} = \frac{(C_1 - C_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Для нахождения разности потенциалов между точками в и е преобразуем выражение (1):

$$\varepsilon_1 - U_{ab} = \varepsilon_2 + U_{bd} = U_{bc}.$$

Данное выражение представляет собой алгебраическую сумму напряжений на участках между точками в и с.

Таким образом:

$$U_{bc} = \frac{(C_1 + C_2)\varepsilon_1 + C_3\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

2.2.14. *Конденсатор емкостью C_1 =600 мкФ зарядами до разности потенциалов U_1 =1,5 кВ и отключили от источника напряжения.*

Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор C_2=400 мкФ. Сколько энергии, занесенной в первом конденсаторе, было израсходовано на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов?

Дано: C_1=600 мкФ,

U_1=1,5 кВ,

C_2=400 мкФ,

Найти: $W_{искр}$ = ?

Решение

Занесенная энергия первого конденсатора определяется выражением

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1}, \qquad (1)$$

где q_1 – заряд на обкладках конденсатора.

При параллельном соединении конденсаторов общая емкость есть $C = C_1 + C_2$,

где C_1 и C_2 – электроемкости первого и второго конденсатора.

Энергия двух параллельно соединенных конденсаторов равна:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)}, \qquad (2)$$

где q - заряд получившегося конденсатора.

Согласно закону сохранения заряда, имеем

$$q = q_1 = C_1U_1, \qquad (3)$$

Энергия, затрачиваемая на образование искры, определяется разностью энергией конденсаторов т.е.

$$W_{искр} = W_1 - W_2.$$

Используя выражения (1), (2) и (3), имеем

$$W_{искр} = \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{(C_1U_1)^2}{2}\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{(C_1 + C_2)}\right).$$

$$W_{искр} = 0,3 \text{ мДж}.$$

2.2.15. *Определить емкость батареи из двух конденсаторов, у которых пространство между пластинами заполнено частично диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε, как показано на рисунке. Площадь пластин S, расстояние между пластинами d.*

Решение

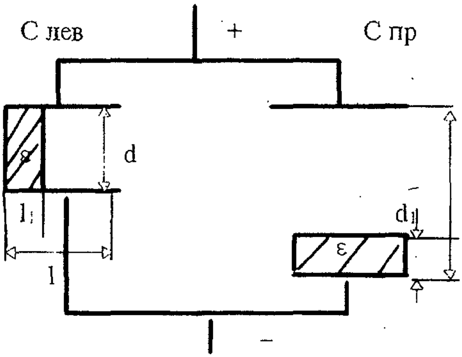


Рис.2.9

Рассмотрим конденсатор С $_{пр}$. Его можно представить в виде двух последовательно соединенных конденсаторов C_1' – без диэлектрика, C_2' – с диэлектриком. Соответственно электроемкость определяется

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, \qquad C_2' = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d - d_1}.$$

Тогда общая емкость двух последовательно соединенных конденсаторов определяется

$$\frac{1}{C_{пр}} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_2'},$$

$$\frac{1}{C_{пр}} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d - d_1}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Тогда

$$C_{пр} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1(\varepsilon - 1) + d}.$$

Левый конденсатор можно представить как два параллельно соединенных конденсатора C_1'' - с полностью заполненным диэлектриком и C_2'' – без диэлектрика.

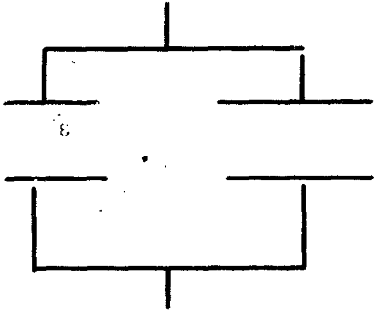


Рис.2.10

Тогда электроемкости определяются:

$$C_1'' = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S''}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 l_1 a}{d} \ ,$$

$$C_2'' = \frac{\varepsilon_0\, a(l - l_1)}{d} \ ,$$

где a – ширина пластины; S'' – площадь пластин.

При параллельном соединении конденсаторов имеем:

$$C_{\text{лев}} = C_1'' + C_2'' \ ,$$

$$C_{\text{лев}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\, l_1\, a}{d} + \frac{\varepsilon_0\, a(l - l_1)}{d} \ .$$

Ширину пластины представим как $a = \frac{S}{l}$. Тогда имеем

$$C_{\text{лев}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 l_1 S + \varepsilon_0 S(l - l_1)}{d\,l} = \frac{\varepsilon_0 S\left[(\varepsilon - 1)l_1 + l\right]}{d\,l} \ .$$

Левый и правый конденсаторы соединены параллельно, таким образом общая емкость

$$C_{\text{об}} = C_{\text{лев}} + C_{\text{пр}} \ .$$

$$C_{\text{об}} = \frac{\varepsilon_0 S\left[(\varepsilon - 1)l_1 + l\right]}{d\,l} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1(\varepsilon - 1) + d} = \varepsilon_0 S\left[\frac{(\varepsilon - 1)l_1 + l}{d\,l} + \frac{\varepsilon}{d_1(\varepsilon - 1) + d}\right].$$

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.1. Основные законы и формулы.

В электродинамике – разделе учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов или макроскопических заряженных тел, – важнейшим понятием является понятие электрического тока.

Электрическим током называется упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

1. Сила постоянного тока

$$I = Q / t,$$

где Q – кол-во электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время t.

2. Плотность электрического тока есть векторная величина, равная отношению силы тока к площади S поперечного сечения проводника:

$$J = I / S\, k,$$

где k – единичный вектор, по направлению совпадающий с направлением движения положительных носителей заряда.

3. Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho\, l / S,$$

где ρ – удельное сопротивление проводника; l – его длина.

4. Проводимость δ проводника и удельная проводимость γ- вещества:

$$\delta = 1 / R, \qquad \gamma = 1 / \rho.$$

5. Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0 – удельные сопротивления, соответственно, при t и 0 °С; t – температура (по шкале Цельсия); α – температурный коэффициент сопротивления.

6. Соединение проводников:

$$\text{последовательное} - R = \sum_{i=1}^{n} R_i,$$

$$\text{параллельное} - \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

где R_i – сопротивление i-го проводника;

n – число проводников.

7. Закон Ома:

для неоднородного участка цепи $I = (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\varepsilon_{12}}{R}$;

для однородного участка цепи $(\varepsilon_{12} = 0)$ $I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U}{R}$;

для замкнутой цепи $(\varphi_1 = \varphi_2)$ $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$,

где R – внешнее сопротивление цепи, r – внутреннее сопротивление цепи.

Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок; U – напряжение на участке цепи; ε – ЭДС всех источников тока в цепи.

8. Первое правило Кирхгофа:

алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

9. Второе правило Кирхгофа:

в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i ,$$

где Ii – сила тока на i-м участке; Ri – активное сопротивление на i-м участке; ε_i – ЭДС источников тока на i-м участке; n – число участков, содержащих источники тока; k - число участков, содержащих источники тока.

10. Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t:

$$A = IUt = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R} .$$

11. Мощность тока:

$$P = I U = I^2 R = U^2 / R.$$

12. Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 R t ,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участках цепи за время t.

13. Закон Ома в дифференциальной форме

$$J=\gamma E,$$

где J – плотность тока; γ – удельная проводимость;

E - напряженность электрического поля.

3.2. Задачи

3.2.1. *Потенциометр с сопротивлением R=100 Ом подключен к источнику тока, ЭДС которого ε равна 150 в и внутреннее сопротивление r=50 Ом. Определить показания вольтметра, с одной из клемм потенциометра подвижным контактом, установленным посередине потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?*

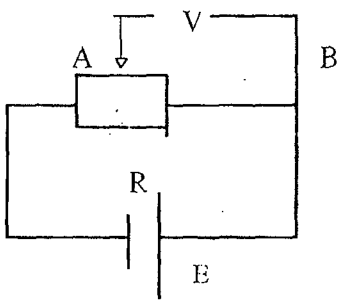


Рис.3.1

Дано: R=100 Ом,

ε = 150 в,

r= 50 Ом,

Rв= 500 Ом,

Найти: U_1= ? U_2 = φ а– φ в= ?

Решение

Показания вольтметра U_1, подключенного к точкам A и B (рис.3.1), определяется по формуле

$$U_1 = I_1R_1,$$

где I_1 - сила тока в неразветвленной части цепи;

R_1 – сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра.

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для всей цепи:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R+r},$$

где R сопротивление внешней цепи.

Сопротивление внешней цепи есть сумма двух сопротивлений:

$$R = R/2 + R_1.$$

Сопротивление R_1 параллельного соединения может быть найдено по формуле

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_в} + \frac{1}{R/2}.$$

Тогда

$$R_1 = \frac{R\,R_в}{(R+2R_в)} = \frac{100\times 500}{(100+2\times 500)} = 45{,}5 \text{ Ом}.$$

Зная, что $R=R/2+R_1$, найдем значение тока I_1:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R/r+R_1+r} = \frac{150}{50+45{,}5+50} = 1{,}03 \text{ А}.$$

Тогда показания вольтметра определятся:

$$U_1 = I_1 R_1 = 1{,}03 \times 45{,}5 = 46{,}9 \text{ В}.$$

Разность потенциалов между точками А и В при отключенном вольтметре равна:

$$\varphi_a - \varphi_в = U_2 = I_2 \times R/2 = \frac{\varepsilon}{R+r} \times \frac{R}{2} = \frac{150\times 100}{(100+50)\times 2} = 50 \text{ В},$$

где I_2 - сила тока в цепи при отключенном вольтметре, определяемая по формуле

$$I_2 = \varepsilon/R+r.$$

3.2.2. *Сила тока в проводнике сопротивлением $R=20$ Ом нарастает в течении времени $\Delta t=2$ с по линейному закону от $I_0=0$ до $I=6$ А (рис 3.2). Определить теплоту Q_1 выделившуюся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 за вторую, а также найти отклонение* Q_2/Q_1.

Дано: $R=20$, $I_0=0$,

$\Delta t=2$ с, $I=6$ А,

Найти: $Q_1=?$ $Q_2=?$ $Q_2/Q_1=?$

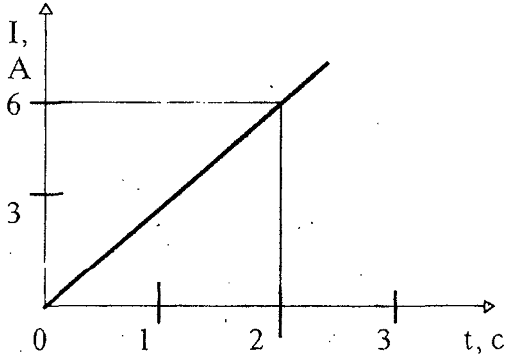


Рис.3.2

Решение

Закон Джоуля-Ленца в виде $Q = I^2 R t$ справедлив для постоянного тока (I=const). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого интервала времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 R\, dt.$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В данном случае I=Rt, где t – коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения силы тока,

$$k = \Delta I / \Delta t = 6 / 2 = 3 \text{ А / с}.$$

Тогда $dQ = k^2 R\, t\, dt$, так как $I = kt$.

Для определения теплоты, выделявшейся за конечный интервал времени Δt, выражение dQ необходимо проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2:

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \left(t_2^3 - t_1^3 \right).$$

Произведем вычисления :

$$Q_1 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 20 (1 - 0) = 60 \text{ Дж},$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 20 (8 - 1) = 420 \text{ Дж}.$$

Найдем отклонение: $Q_2 / Q_1 = 420 / 60 = 7$, то есть за вторую секунду выделится теплоты в семь раз больше, чем за первую.

3.2.3. *Определить разность потенциалов* $\varphi_2 - \varphi_1$ *на зажимах источника* ($\varepsilon_1 = 4$ *В; r=0,5 Ом), включенных в некоторую цепь. Направления тока, идущего через источник, показаны на рис.3.3 а, б, в* ($I_1 = 0$; $I_2 = 2$ А; $I_3 = 10$ А). *При каком составе внешней цепи (во всех случаях ее считать неразветвленной) возможны рассматриваемые ситуации?*

Дано: $\varepsilon_1 = 4$ В,
$r = 0{,}5$ Ом,
$I_1 = 0$,
$I_2 = 2$ А,
$I_3 = 10$ А .

Найти: $\varphi_2 - \varphi_1 = ?$

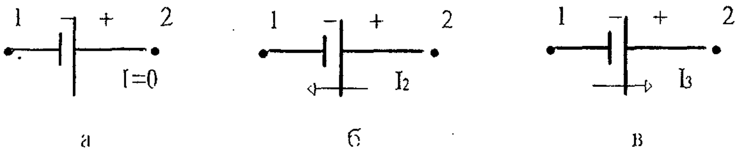


Рис.3.3

Внутри любого источника существует стороннее электрическое поле, под действием которого на полюсах источника происходит накопление зарядов противоположных знаков. Вектор $E_{ст}$ направлен всегда от < – > к < + >. Кулоновское поле создается зарядами, накопившимися на полюсах источника, и если в цепи нет других источников, то кулоновское поле направлено навстречу стороннему, причем

$$E_к \le E_{ст}, \ \varphi_2 - \varphi_1 \le \varepsilon .$$

Очевидно, знаки равенства соответствуют разомкнутой цепи.

При наличии других источников в цепи разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ может быть и меньше, и больше, чем ЭДС ε_1, может оказаться и отрицательной величиной. В последнем случае $\varphi_2 < \varphi_1$ и векторы Ек и $E_{ст}$ сонаправлены.

Направление тока, протекающего через источник, определяется направлением напряженности результирующего поля:

$$E = Eк + E_{ст}$$

(согласно закону Ома, в дифференциальной форме вектор плотности тока $i = \lambda E$, где λ - удельная проводимость).

В первом случае при $I=0$

$$E = E_к + E_{ст} = 0.$$

Следовательно, $E_к = -E_{ст}$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_1$.

Это может наблюдаться как при разомкнутой цепи, так и при наличии в цепи хотя бы еще одного источника с ЭДС $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, включенного навстречу источнику ε_1.

Во втором случае, судя по направлению тока, результирующий вектор $E = E_к + E_{ст}$ и вектор $E_{ст}$ противоположны по направлению; следовательно, кулоновское поле также противоположно стороннему, причем

$$E_к > E_{ст}, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 > \varepsilon_1.$$

Это справедливо при наличии в цепи хотя бы еще одного источника ε_2, включенного навстречу источнику ε_1; очевидно, что

$$\varepsilon_2 > \varphi_2 - \varphi_1.$$

Искомая разность потенциалов может быть рассчитана из обобщенного закона Ома, примененного к участку 1 ε_1 2.

В третьем случае результирующий вектор E и вектор $E_{ст}$ сонаправлены. Если кулоновское поле противоположно по направлению стороннему, то

$$E_к < E_{ст}, \ \varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon_1.$$

Это имеет место, если внешняя цепь состоит только из нагрузки.

Кулоновское поле может быть и сонаправлено стороннему, тогда $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$. При этом в цепи должен быть еще хотя бы один источник, включенный согласованно (то есть последовательно) с источником ε_1.

Искомую разность потенциалов можно по-прежнему найти из обобщенного закона Ома.

Решение

В первом случае ($I_1=0$). Тогда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_1 = 4 \text{ В}.$$

Во втором случае ($I_2=2$ А) обобщенный закон Ома для участка 1 ε_1 2 имеет вид

$$-I_2 r = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$$

откуда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_1 + I_2 r = 5 \text{ В}.$$

В третьем случае ($I_3=10$ А) обобщенный закон Ома для участка 1 ε_1 2 имеет вид $I_3 r = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$, откуда $\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_1 - I_3 r = -1$ В.

Очевидно, что $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$ в тех случаях, когда сила тока I (направление тока показано на рис.3.3, в) больше, чем сила тока короткого замыкания I к.з = ε / r. Если I = I к.з, то разность потенциалов на зажимах источника равна нулю.

3.2.4. *Под конец зарядки аккумулятора при силе тока в цепи* $I_1 = 3$ *А показание вольтметра, подключенного к зажимам аккумулятора,* $U_1 = 4{,}25$ *В. В начале разрядки того же аккумулятора при силе тока в цепи* $I_2 = 4$ *А показание вольтметра* $U_2 = 3{,}9$ *В (рис. 3.4). Определить ЭДС* ε *и внутреннее сопротивление r аккумулятора.*

Дано: I_1=3 А,
U_1=4,25 В,
I_2=4 А,
U_2=3,9 В.
Найти: ε = ?
r = ?

а б

Рис.3. 4

Решение

Аккумуляторы являются многоразовыми химическими источниками тока. При длительной работе они разряжаются, то есть их ЭДС уменьшается. Аккумуляторы могут быть вновь заряжены при пропускании электрического тока от внешнего источника в направлении, противоположном стороннему полю аккумулятора. В конце зарядки, так же как и в начале разрядки (то есть самостоятельной работы аккумулятора как источника на нагрузку), можно считать, что ЭДС аккумулятора имеет максимальное номинальное значение, которое и требуется определить.

В условии заданы показания вольтметра, подключенного к зажимам аккумулятора. Вольтметр, включенный в цепь, всегда показывает напряжение на себе самом, равное разности потенциалов между точками, к которым он подключен.

В данном случае показания вольтметра

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 \qquad (1)$$

(при условии, что $\varphi_2 > \varphi_1$). Поскольку внутреннее сопротивление вольтметра не задано, следует предположить, что оно настолько велико по сравнению с сопротивлением всех элементов цепи, что силой тока, идущего через вольтметр, можно пренебречь. Тогда сила тока, протекающего через аккумулятор, равна заданному значению I_1 (при разрядке I_2).

При зарядке аккумулятора, когда ток I_1 направлен, как показано на рисунке, $\varepsilon < \varphi_2 - \varphi_1$. При разрядке ток I_2 направлен в противоположную сторону и $\varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon$. Следовательно, ЭДС аккумулятора должна удовлетворять условию

$$U_2 < \varepsilon < U_1.$$

Применяя обобщенный закон Ома к участку 1 ε 2 для каждого из двух процессов, получим два уравнения, содержащих в качестве неизвестных ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора.

Решение

При зарядке и разрядке аккумулятора закон Ома для участка 1 ε 2 имеет вид

$$-I_1 r = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon , \qquad I_2 r = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon .$$

Учитывая равенство (1), найдем, что $\varphi_1 - \varphi_2 = -U_1$; $\varphi_1' - \varphi_2' = -U_2$.

Подставляя эти выражения в записанные выше уравнения и решая их совместно, получаем:

$$r = (U_1 - U_2) / (I_1 + I_2) = 0{,}05 \text{ Ом};$$

$$\varepsilon = (U_1 I_2 + U_2 I_1) / (I_1 + I_2) = 4{,}1 \text{ В}.$$

3.2.5. *Два гальванических элемента ($\varepsilon_1 = 5$ В; $r_1 = 0{,}3$ Ом; $\varepsilon_2 = 4$ В, $r_2 = 0{,}2$ Ом) соединены параллельно и замкнуты на резистор R (рис.3.5). Определить: 1) сопротивление R_1 резистора, при котором второй элемент будет скомпенсирован; 2) силу токов в цепи при сопротивлении резистора $R_2 = 1{,}88$ Ом; 3) силу токов в цепи при $R = R_2$, после того как второй элемент с коммутирован.*

Дано: $\varepsilon_1 = 5$ В

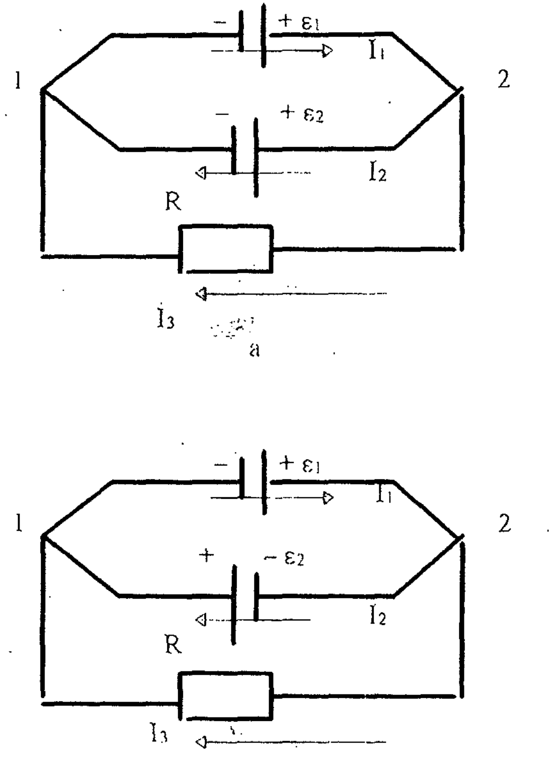
$r_1 = 0{,}3$ Ом

$\varepsilon_2 = 4$ В $\qquad R_2 = 1{,}88$ Ом

$r_2 = 0{,}2$ Ом $\qquad R = R_2$

Найти: $R_1 = ?$

$I_1 = ?$ $\quad I_2 = ?$ $\quad I_3 = ?$



б

Рис.3.5

Решение

Параллельным называется такое соединение источников, при котором на их зажимах устанавливается одинаковая разность потенциалов, а сила тока в цепи равна сумме сил токов, текущих через источники. При этом обычно предполагается, что источники соединяются одноименными полюсами (рис.3.5, а).

Поскольку $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, ток I_1, идущий через первый элемент, в любом случае направлен так, как показано на рисунке, и разность потенциалов

$$\varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon_1 .$$

Если эта разность потенциалов окажется равной ЭДС ε_2 второго элемента, то внутри него кулоновское и стороннее поля будут взаимно скомпенсированы ($E_{к2} = -E_{ст2}$). В этом случае $I_2=0$. Тогда, применяя обобщенный закон Ома к участку 1 ε_1 2, можно найти силу тока I_1. При $I_2=0$ $I_1= I_3$ и закон Ома, записанный для замкнутого контура 1 ε 2 R1 (или второе правило Кирхгофа), позволит найти сопротивление R_1. Если $R_2 > R_1$, то соответственно уменьшится сила тока I_1, а разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окажется больше, чем ε_2. В этом случае второй элемент будет подавлен, ток I_2 потечет так, как показано на рисунке. Силы токов могут быть найдены из правил Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа, примененное к узлу 1 (или 2), даст соотношение между всеми силами токов I_1, I_2, I_3. Второе правило Кирхгофа удобно применить к контурам 1 ε_1 2 R1 и 1 ε_2 2 R1.

Этим же способом можно найти и силы токов после коммутирования второго элемента (рис.3.5, б). После коммутирования второго элемента его стороннее поле стремится перемещать положительные заряды к точке 1, а стороннее поле первого элемента к точке 2. И хотя $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, нельзя до проведения расчета указать потенциал какой точки (2 или 1) больше, так как внутреннее сопротивление r_1 первого элемента также больше сопротивления r_2 второго элемента. Направление тока I_3 на рисунке дано в предположении, что $\varphi_2 > \varphi_1$.

Решение

1. Запишем обобщенный закон Ома для участка 1 ε_1 2 (рис.3.5,а):

$$I_1 r_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 .$$

Учитывая, что $\varphi_1 - \varphi_2 = \varepsilon_2$ находим

$$I_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/r_1 .$$

Применяя закон Ома для замкнутого контура 1 ε_1 2 R1 при условии, что $I_1= I_3$, получаем

$$I_1 = \varepsilon_1/(r_1 + R_1) .$$

Приравняем правые части полученных выражений:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/r_1 = \varepsilon_1/(r_1 + R_1) ,$$

откуда $$R_1 = \varepsilon_2 r_1/(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 1{,}2 \text{ Ом} .$$

2. Запишем первое правило Кирхгофа для узла 1, второе правило Кирхгофа для контура 1 ε_1 2 R1 и 1 ε_2 2 R1 и при направлении обхода по часовой стрелке:

$$I_1 = I_2 + I_3, \qquad (1)$$

$$I_1 r_1 + I_3 R = \varepsilon_1, \qquad (2)$$

$$-I_2 r_2 + I_3 R = \varepsilon_2 . \qquad (3)$$

Уравнения (1)-(3) составляют систему относительно неизвестных I_1, I_2, I_3. Умножив уравнение (2) на r_2, а уравнение (3) – на r_1, сложим их почленно:

$$(I_1 - I_2) r_1 r_2 + I_3 R (r_1 + r_2) = \varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1 .$$

Решая это уравнение и учитывая, что $R=R_2$, а $I_1-I_2 = I_3$ [см. (1)], находим

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + R_2(r_1 + r_2)} = 2{,}2 \text{ A} .$$

Из уравнений (2) и (3)

$$I_1 = (\varepsilon_1 - I_3 R_2) / r_1 = 2{,}9 \text{ A}; \qquad I_2 = (I_3 R_2 - \varepsilon_2) / r_2 = 0{,}7 \text{ A} .$$

3. Правила Кирхгофа примененные по прежнему к узлу 1 и к контурам 1 ε_1 R1 и 1 ε_2 2 R1 (рис.3.5,б), дадут:

$$I_1 = I_2 + I_3 ;$$

$$I_1 r_1 + I_3 R = \varepsilon_1 ;$$

$$I_2 r_2 + I_3 R = -\varepsilon_2 .$$

Произведя те же преобразования, что и в случае 2, найдем:

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + R_2(r_1 + r_2)} = -0{,}2 \text{ A} ;$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - I_3 R_2}{r_1} = 17{,}9 \text{ A} ;$$

$$I_2 = \frac{I_3 R_2 + \varepsilon_2}{r_2} = 18{,}1 \text{ A} .$$

Знак « – » в значении силы тока I_3 показывает, что предполагавшееся направление этого тока неверно. В действительности ток I_3 течет в обратном направлении, т.е. $\varphi_1 > \varphi_2$.

3.2.6. *В схеме, показанной на рис.3.6* $\varepsilon_1 = 20$ *В,* $\varepsilon_2 = 25$ *В,* $R_1 = 10$ *Ом;* $R_2 = 15$ *Ом; внутреннее сопротивление источников пренебрежимо* *малы. Определить: 1) работу, совершенную источниками, и полное количество выделившейся в цепи джоулевой теплоты за интервал времени Δt =0,5 с при R_3 =82 Ом; 2) при каком сопротивлении R_3 выделяемая на этом резисторе тепловая мощность максимальна.*

Дано: ε_1=20 В,

ε_2=25 В ,

R_1= 10 Ом,

R_2=15 Ом,

R_3=82 Ом,

Δt =0,5 с.

Найти: A=? Q=? R_3=?

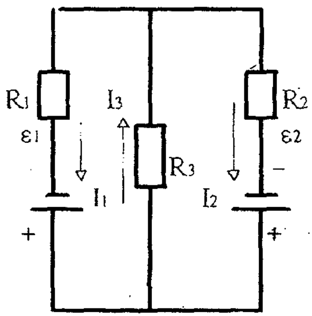


Рис.3.6

Решение

Под работой источника следует понимать работу, совершаемую силами стороннего поля при перемещении заряда, проходящего через источник за промежуток времени Δt. При постоянной силе тока I, согласно определению электродвижущей силы, эта работа может быть рассчитана по формуле

$$A= \varepsilon I \Delta t.$$

Очевидно, что при направлении тока, совпадающем с направлением стороннего поля, работа источника положительна. Количество теплоты, выделяющееся на неразветвленном участке с сопротивлением R,

$$Q=I^2 R \Delta t.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо найти силы токов во всех участках цепи, для чего можно использовать правила Кирхгофа.

Тепловая мощность (отношение количества теплоты к промежутку времени в течение которого она выделяется) на резисторе R_3 тем больше, чем больше сила тока I_3 и сопротивление R_3. С другой стороны, с ростом сопротивления R_3, при котором выделяемая на резисторе тепловая мощность максимальна, может быть рассчитано только тогда, когда будет получено аналитическое выражение этой тепловой мощности в условиях заданной схемы.

Решение

1. Применим правила Кирхгофа к одному из узлов и к замкнутым контурам $R_1 \varepsilon_1 R_3$ и $R_2 \varepsilon_2 R_3$:

$$I_1 = I_2 + I_3, \tag{1}$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon_1, \tag{2}$$

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2. \tag{3}$$

Умножив уравнение (2) на R_2, а уравнение (3) на R_1 и почленно их сложив, после несложных преобразований с учетом (1) получим

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}.$$

При заданных значениях ЭДС и сопротивлений $I_3 = 0{,}25$ А.

Из уравнений (2) и (3)

$$I_1 = \frac{(\varepsilon_1 - I_3 R_3)}{R_1} = -0{,}05 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{(\varepsilon_2 - I_3 R_3)}{R_2} = 0{,}3 \text{ А}.$$

Отрицательное значение силы тока I_1 означает лишь то, что направление этого тока указано на схеме неверно. В действительности ток через первый источник течет в противоположном направлении и сила этого тока $I_1' = 0{,}05$ А.

При таком направлении тока I_1 работа первого источника отрицательна:

$$A_1 = -\varepsilon_1 I_1' \Delta t = -0{,}5 \text{ Дж}.$$

Работа второго источника положительна, так как ток I_2, идущий через второй источник, направлен по его стороннему полю:

$$A_2 = \varepsilon_2 I_2 \Delta t = 3{,}75 \text{ Дж}.$$

Поскольку других источников в цепи нет, количество теплоты выделяемое во всей цепи,

$$Q = A_1 + A_2 = 3{,}25 \text{ Дж},$$

Очевидно, эта величина может быть рассчитана и по формуле

$$Q = \left(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3\right)\Delta t .$$

2. Выделяемая на резисторе R_3 тепловая мощность:

$$N = I_3^2 R_x ,$$

где R_x - искомое сопротивление. Учитывая выражение (4), получаем:

$$N = \frac{\left(\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1\right)^2 R_x}{\left[R_1 R_2 + R_x\left(R_1 + R_2\right)\right]^2} .$$

Для ответа на вопрос задачи приравняем к нулю производную $\dfrac{dN}{dR_x}$:

$$\frac{dN}{dR_x} = \frac{1}{\left[R_1 R_2 + R_x\left(R_1 + R_2\right)\right]}\Big\{\left(\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1\right)^2\left[R_1 R_2 + R_x\left(R_1 + R_2\right)\right]^2 -$$

$$-2R_x\left(R_1 + R_2\right)\left[R_1 R_2 + R_x\left(R_1 + R_2\right)\right]\Big\} = 0$$

После алгебраических преобразований получим

$$\frac{\left(\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1\right)^2}{\left[R_1 R_2 + R_x\left(R_1 + R_2\right)\right]^3}\left[R_1 R_2 - R_x\left(R_1 + R_2\right)\right] = 0 ,$$

откуда

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right)} = 6 \text{ Ом}.$$

3.2.7. *Определить силу тока, текущего через элемент ε_2, если $\varepsilon_1 = 1$ В, $\varepsilon_2 = 2$ В, $\varepsilon_3 = 3$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 0{,}5$ Ом, $r_3 = 1/3$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 1/3$ Ом (рис. 3.7)*

Дано: $\varepsilon_1 = 1$ В, $\varepsilon_2 = 2$ В, $\varepsilon_3 = 3$ В,

$r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 0{,}5$ Ом, $r_3 = 1/3$ Ом,
$R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 1/3$ Ом.

Найти: $I_2 = ?$

Решение

Физическая система – электрическая цепь, в которой имеется несколько различных источников тока. Найти результирующую ЭДС невозможно и, следовательно, нельзя применить закон Ома для замкнутой цепи. В этом случае электрическая цепь может быть рассчитана с помощью законов Кирхгофа.

Сначала необходимо выбрать (произвольно) направления токов в ветвях. Выберем их так, как показано на рис.3.7. Если мы ошиблись в выборе направления какого-нибудь тока, то в окончательном решении этот ток получится отрицательным; если же случайно выбрано правильное направление тока, то он получится положительным.

Применим первый закон Кирхгофа. Он справедлив для узлов электрической цепи. В данной схеме узлов два: точки А и С. Для узла А по первому закону Кирхгофа получим

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \qquad (1)$$

Для узла С первый закон Кирхгофа ничего нового не даст.

Применим второй закон Кирхгофа. Он справедлив только для замкнутых контуров. В данной схеме их три: АВСА, АСДА, АВСДА.

Рассмотрим контур АВСА. В этом контуре имеется две ЭДС (ε_1 и ε_2),

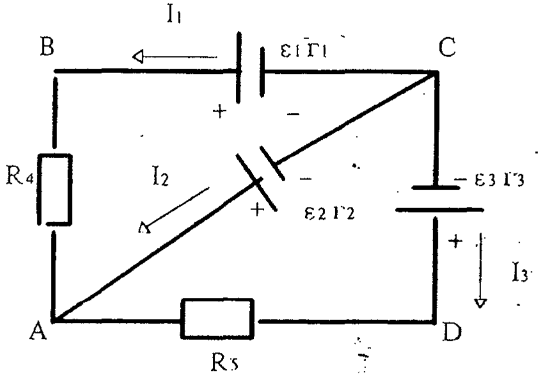


Рис.3.7

три резистора (r_1, r_2 и R_4) и два тока (I_1 и I_2). Для применения второго закона Кирхгофа необходимо выбрать (произвольно) условно-положительное направление обхода контура. Оно необходимо для определения знаков ЭДС и токов. Если направления ЭДС или тока совпадают с направлением обхода контура, то их считают положительными. В противном случае ЭДС или ток считают отрицательными.

Выберем за положительное направление обхода контура АВСА направление против часовой стрелки. ЭДС ε_1 направлена против часовой стрелки, следовательно, ее считаем положительной; ЭДС ε_2 направлена по часовой стрелке (т.е. против направления обхода контура), следовательно, она войдет в уравнение второго закона Кирхгофа со знаком минус. Ток I_1 проходит через резисторы r_1 и R_4, и его направление совпадает с направлением обхода контура. Ток I_2 проходит через резистор r_2 и направлен против направления обхода. Следовательно, ток I_1 положителен, ток I_2 отрицателен. По второму закону Кирхгофа для контура АВСА получаем:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1\left(r_1 + R_4\right) - I_2 r_2 . \qquad (2)$$

Если выбрать за положительное направление обхода этого контура направление по часовой стрелке, то по второму закону Кирхгофа найдем:

$$-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -I_1\left(r_1 + R_4\right) + I_2 r_2 .$$

Получено уравнение (2), умноженное на -1. Очевидно, что эти уравнения эквивалентны. Таким образом, сущность второго закона Кирхгофа не зависит от произвольного выбора направления обхода контура.

Рассмотрим контур АСДА. Выберем за положительное направление обхода этого контура направление против часовой стрелки. Применяя второй закон Кирхгофа, получим:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2 r_2 - I_3\left(r_3 + R_5\right). \qquad (3)$$

Система уравнений (1) - (3) является замкнутой. Задача физически решена. Решая полученную систему уравнений, находим:

$$I_1 = -5/8\ \text{А}, \quad I_2 = -1/2\ \text{А}, \quad I_3 = 8/9\ \text{А}.$$

Токи I_1 и I_2 получились отрицательными. Это означает, что направления их случайно были выбраны ошибочно. Ток I_3 положителен, следовательно, его направление случайно было выбрано правильно.

4. ТОК В МЕТАЛЛАХ, ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

4.1. Основные законы и формулы

1. Плотность тока j, средняя скорость $<\upsilon>$ упорядоченного движения носителей заряда и их концентрация n связаны соотношением

$$j = l\, n <\upsilon>,$$

где l – элементарный заряд.

2. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$\omega = \gamma E^2,$$

где ω – объемная плотность тепловой мощности.

3. Термоэлектродвижущая сила, возникающая в термопаре,

$$\varepsilon = \alpha\,(T_1 - T_2),$$

где α – удельная термоЭДС;

$(T_1 - T_2)$ – разность температур спаев термопары.

4. Закон электролиза Фарадея.

Первый закон: $m = k\,Q$,

где m – масса вещества, выделившегося на электроде при прохождении через электролит электрического заряда Q;

k – электрохимический эквивалент вещества.

Второй закон:

$$k = \frac{\mu}{F n},$$

где $F = 96{,}5 \times 10^3$ кг/моль – постоянная Фарадея;

μ – молярная масса ионов данного вещества;

n – валентность ионов.

Объединенный закон

$$m = \frac{1}{F} \times \frac{\mu Q}{n} = \frac{1}{F}\frac{\mu I t}{n}$$

где I - сила тока, проходящего через электролит;

t – время, в течение которого существовал ток.

5. Подвижность ионов:

$$в = <\upsilon> / E,$$

где $<\upsilon>$ – средняя скорость упорядоченного движения ионов;

E – напряженность электрического поля.

6. Закон Ома в дифференциальной форме для электролитов и газов при самостоятельном разряде в области, далекой от насыщения:

$$j = Q\,n\,(в_+ + в_-)\,E,$$

где Q – заряд иона;

n – концентрация ионов;

$в_+$ и $в_-$ – подвижности соответственно положительных и отрицательных ионов.

7. Плотность тока насыщения:

$$j_{нас} = Q n_0 d \ ,$$

где n_0 – число пар ионов, создаваемых ионизатором в единице объема в единицу времени;

d – расстояние между электродами;

($n_0 = N/Vt$, где N – число пар ионов, создаваемых ионизатором за время t в пространстве между электродами; V – объем этого пространства).

4.2. Задачи

4.2.1. *Сколько электрической энергии необходимо затратить для получения из подкисленной воды водорода, имеющего при температуре $T = 300$ К и давлении $P=100$ кПа объем $V=2,5 \times 10^{-3}$ м^3, если электролиз ведется при напряжении $U= 5$ В, а КПД установки $\eta = 0,75$?*

Дано: T= 300 К,

$P=10^5$ Па,

$V=2,5 \times 10^{-3}$ м^3,

$\eta = 0,75$,

U= 5 В.

Найти: W = ?

Решение

Согласно закону Фарадея масса m водорода, выделившегося при электролизе подкисленной воды при КПД установки η, равна:

$$m = \eta \frac{M}{2n F} q \ ,$$

где q – заряд, прошедший через подкисленную воду.

Если при электролизе на электроды подается напряжение U и их поляризацией можно пренебречь, то для получения газа массой m необходимо затратить энергию, равную

$$W = Uq \ .$$

Учитывая эту формулу, закон Фарадея можно представить в виде :

$$m = \eta \frac{M}{2n F} \frac{W}{U} \ .$$

Массу водорода, полученную при электролизе, можно выразить из уравнения Менделеева-Клайперона через параметры состояния газа:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT .$$

Тогда $$W = \frac{2PVUnF}{\eta RT} \approx 134 \text{ кДж} .$$

4.2.2. *При серебрении пластинки через раствор нитрата серебра проходит ток плотностью $j = 2$ кА / м^2 . С какой средней скоростью растет толщина серебряного покрытия пластинки? Относительная атомная масса $A_2 = 108$, валентность $n = 1$; плотность серебра $\rho = 1{,}05 \times 10^4$ кг / м^3.*

Дано: $j = 2 \times 10^3$ А / м^2,

$\rho = 1{,}05 \times 10^4$ кг / м^3 .

Найти: $\upsilon = ?$

Решение

При прохождении электрического тока через раствор нитрата серебра за время t на катоде откладывается серебро массой

$$m = \frac{M}{nF} It ,$$

где $F = 9{,}65 \times 10^4$ кл / моль – постоянная Фарадея, I – сила тока в растворе, M – молярная масса серебра $M = 0{,}108$ кг / моль.

Если слой серебра плотностью ρ осаждается равномерно по всей поверхности пластинки площадью S и толщина слоя по обе стороны пластинки h, то масса выделившегося серебра равна:

$$m = \rho S h .$$

С учетом этого формулу Фарадея можно переписать так:

$$\rho S h = \frac{M}{nF} It ,$$

откуда $$\rho \frac{h}{t} = \frac{MI}{nFS} \quad \text{или} \quad \rho \upsilon = \frac{M}{nF} j ,$$

так как $\frac{I}{S} = j$; $\frac{h}{t} = \upsilon$ – средняя скорость роста толщины покрытия,

$$\upsilon = \frac{Mj}{nF\rho} = 2{,}5 \times 10^{-7} \text{ м / с.}$$

4.2.3. *По железному проводнику, диаметр d сечения которого равен 0,6 мм, течет ток силой 16 А. Определить среднюю скорость $\langle \upsilon \rangle$ направленного движения электронов, считая, что концентрация n свободных электронов равна концентрации n′ атомов проводника*

Дано: d = 0,6 мм,
I = 16 А.
n = n′.

Найти: $\langle \upsilon \rangle$ = ?

Решение

Средняя скорость направленного (упорядоченного) движения электронов определяется по формуле

$$\langle \upsilon \rangle = l / t , \quad (1)$$

где t – время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся в отрезке проводника между сечениями 1 и 2 , пройдя через сечение 2 (рис.4.1), перенесут заряд Q = e N и создают ток силой

$$I = Q / t = eN / t , \quad (2)$$

где e – заряд электрона,
N - число электронов в отрезке проводника,
l – его длина.

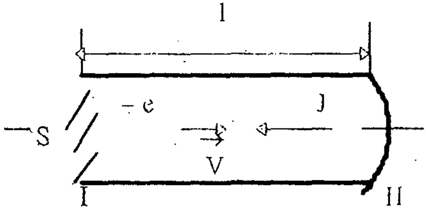


Рис.4.1

Число свободных электронов в отрезке проводника объемом V можно выразить следующим образом :

$$N = nV = n\,l\,S, \quad (3)$$

где S – площадь сечения.

По условию задачи n = n′. Следовательно,

$$n = n' = \frac{N_a}{V_m} = \frac{N_a}{\mu\rho} = \frac{N_a\rho}{\mu} , \quad (4)$$

где N_a – число Авогадро; V_m – молярный объем металла;

μ – молярная масса металла; ρ – плотность металла.

Подставив последовательно выражения n из формулы (4) в равенство (3) и N из формулы (3) в равенство (2), получим

$$I = \frac{N_a \rho l S e}{\mu t},$$

отсюда найдем $l = \dfrac{I \mu t}{N_a \rho S e}$.

Подставив выражение l в формулу (1) и сократив на t, найдем искомую величину средней скорости электронов:

$$<\upsilon> = \frac{I \mu t}{N_a \rho S e t} = \frac{I \mu}{N_a \rho S e} =$$

$$= \frac{16 \times 56 \times 10^{-3} \times 4}{6{,}02 \times 10^{23} \times 7{,}88 \times 10^{3} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 3{,}14 \times 0{,}36 \times 10^{-6}} = 4{,}2 \times 10^{-2} \text{ м/с}.$$

5. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

5.1. Основные законы и формулы

1. Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$M = [\, p_m B \,],$$

где B – магнитная индукция; p_m – магнитный момент контура с током.

$$p_m = I\, S\, n,$$

где S – площадь контура с током; n – единичный вектор нормали к поверхности контура.

2. Связь магнитной индукции B и напряженности H магнитного поля:

$$B = \mu_0 \mu H,$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ - магнитная проницаемость среды.

3. Закон Био-Савара-Лапласа: $dB = \dfrac{\mu_0 \mu}{4\pi} \dfrac{I[dl, r]}{r^3}$,

где dB – магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины dl проводника с током I; r - радиус-вектор, проведенный от dl к точке, в которой определяется магнитная индукция.

4. Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R},$$

где R – расстояние от оси проводника.

5. Магнитная индукция в центре кругового проводника с током:

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R},$$

где R – радиус кривизны проводника.

6. Закон Ампера: $dF = I\ [\,dl, B\,]$,

где dF – сила, действующая на элемент длины dl проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией B.

7. Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl,$$

где R – расстояние между проводниками;

dl – отрезок проводника.

8. Сила Лоренца:

$$F = Q\,[\,\upsilon B\,],$$

где F – сила, действующая на заряд Q, движущийся в магнитном поле со скоростью υ.

9. Формула Лоренца:

$$F = QE + Q\ [\,\upsilon B\,],$$

где F – результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q, если на него действует электрическое поле напряженностью E и магнитное поле индукцией B.

10. Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 N I / l,$$

где l – длина соленоида.

11. Закон Фарадея: $\xi_i = -d\Phi/dt$,

где ξ_i – ЭДС индукции.

12. ЭДС самоиндукции:

$$\xi_i = -L \frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура.

13. Индуктивность соленоида (тороида):

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l},$$

где N - число витков соленоида;

l - его длина.

14. Токи при размыкании и при замыкании цепи:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}; \qquad I = I_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right),$$

где $\tau = L/R$ - время релаксации (L - индуктивность; R - сопротивление).

15. Намагниченность:

$$J = P_m / V = \sum p_a / V,$$

где $P_m = \sum p_a$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

16. Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$J = \chi H,$$

где χ - магнитная восприимчивость вещества.

17. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L H dl = I,$$

где I - алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L.

5.2. Задачи

5.2.1. *Определить магнитную индукцию B поля в точке A, если по бесконечно длинному проводнику, имеющему конфигурацию, изображенную на рис 5.1 течет ток I=3 A, длина a=20 см. Относительную максимальную проницаемость μ считать равной 1.*

Дано: a=20 см=0,2 м,

I=3 А.

Найти: B = ?

Решение

Индукция в точке A является суперпозицией индукций, создаваемых каждым из элементов проводника. Индукция, создаваемая двумя лучами с вершинами в точке B и E, уходящими в бесконечность, равна индукции прямолинейного бесконечно длинного проводника B_∞ за исключением индукции, создаваемой отрезком BE.

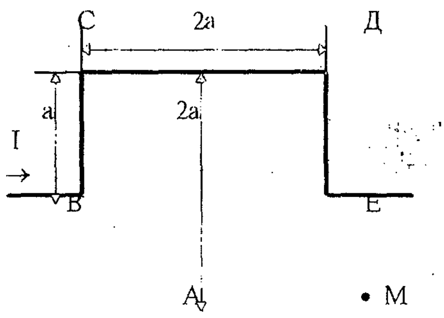


Рис. 5.1

Кроме того, индукции, создаваемые отрезками ВС и ДЕ в точке А равны между собой. На основании этого

$$B_a = B_\infty - B_{ве} + 2B_{де} + B_{сд}. \qquad (1)$$

Запишем выражения для каждого из слагаемых в (1):

$$B_\infty = \frac{M_0}{2\pi}\frac{I}{a},$$

$$B_{ве} = \frac{M_0}{2\pi}\frac{I}{a}\cos(\angle OEA),$$

$$B_{де} = \frac{M_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left[\cos(\angle AДM) - \cos(\angle AEM)\right],$$

$$B_{сд} = \frac{M_0}{2\pi}\frac{I}{a}\cos(\angle CДA).$$

Рассматривая соответствующие треугольники, находим косинусы углов:

$$\cos(\angle OEA) = \frac{a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos(\angle AДM) = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}},$$

$$\cos(\angle AEM) = \frac{a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos(\angle CДA) = \frac{a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя эти значения в (2) и (1), получим

$$B_a = \frac{M_0 I}{2\pi a}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 2{,}79 \times 10^{-6} \text{ Тл}.$$

5.2.2. *Определить индукцию в точке О, если проводник имеет конфигурацию, изображенную на рис.5 2. Ток в проводнике I=10 А, радиус R=0,4 м.*

Дано: I=10 А ,

R=0,4 м.

Найти: B_0 = ?

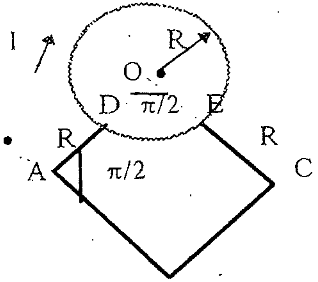


Рис. 5.2

Решение

Индукция в точке О является векторной суммой индукций, создаваемых каждым из элементов проводника. Поскольку направления последних совпадают, то результирующую индукцию можно записать в виде алгебраической суммы. Индукция, создаваемая отрезками ДА и ЕС, равна нулю, поскольку точка О лежит на линиях продолжения этих отрезков и векторное произведение в формуле

Био-Савара-Лапласа $\left[\alpha \vec{l}\ \vec{r} \right] = 0$,

$$B_0 = B_1 + 2B_2 , \qquad (1)$$

где B_1 - индукция, создаваемая проводником в виде окружности радиуса R с исключенным сектором $\Delta\varphi = \pi / 2$.

$$B_1 = \frac{3}{4}\frac{M_0}{2}\frac{I}{R} , \qquad (2)$$

B_2 – индукция, создаваемая одним из отрезков АВ и ВС.

$$B_1 = \frac{M_0 I}{4\pi}\frac{1}{2R}\left[\cos(\angle OBA) - \cos\pi/2\right] \quad (3)$$

Кроме того, $\angle$ OBA = π / 2. Подставляя (3) и (2) в (1), получаем:

$$B_0 = \frac{M_0 I}{2R}\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4\pi}\cos\frac{\pi}{4}\right).$$

После подстановки численных значений получаем:

B_0 = 1,53 x 10^5 Тл.

5.2.3. *Электрон в нормальном состоянии атома водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом R=5,3 x 10^{-11} м. Вычислить силу эквивалентного кругового тока I и напряженность H в центре окружности.*

Дано: R=5,3 x 10^{-11} м

Найти: I = ? H = ?

Решение

При движении электрона вокруг ядра центробежная сила инерции компенсируется электрической силой притяжения его к ядру. Тогда можно записать:

$$m\omega^2 R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \quad (1)$$

где m – масса энергии (m = 9,1 x 10^{-31} кг); ω – угловая частота вращения; e – заряд электрона, равный заряду ядра по величине.

За одну секунду электрон совершит n=1 / T оборотов. Здесь T – период (длительность одного оборота). При этом через фиксированную точку окружности пройдет заряд, равный e n. Это эквивалентно потому, что по окружности течет ток

$$I = en = e / T = \omega e/2\pi . \quad (2)$$

Выражая из (1) ω и подставляя в (2), получим:

$$I = \frac{e^2}{2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}} . \quad (3)$$

Ток I, текущий по окружности, создает напряженность H:

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (4)$$

Подставляя в (3) и (4) численные значения величин, получим:

I = 1,05 x 10^{-3} А; H = 10^0 А / м.

5.2.4. *Диск радиусом R=40 см несет равномерно распределенный по поверхности заряд Q=0,1 мкКл Диск равномерно вращается с частотой n=60 c^{-1} относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить:*

1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого диском;

2) отношение магнитного момента к моменту импульса, p_m / L, если масса m диска равна 600 гр

Дано: R=40 см=0,4 м;

Q=0,1 мкКл= 1×10^{-7} Кл;

n=60 c^{-1};

m=600 гр.=0,6 кг.

Найти: p_m; p_m / L ?

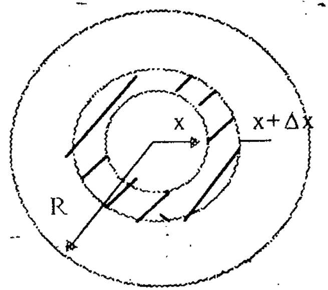


Рис.5.3

Решение

Выделим в диске круговой слой диаметром x и шириной dx. После поворота диска на угол $\Delta\varphi$ через поперечное сечение этого слоя пройдет заряд

$$\Delta Q = S_n \rho x \Delta\varphi , \tag{1}$$

где S_n - площадь сечения этого слоя толщины Д:

$$S_n = Д\, dx ; \tag{2}$$

ρ объемная плотность заряда.

Угол поворота $\Delta\varphi$ связан со временем поворота

$$\Delta\varphi = 2\pi n \Delta t , \tag{3}$$

Подставляя (3) и (2) в (1) и деля на Δt, найдем силу тока dI, создаваемую этим слоем:

$$dI = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Д \rho 2\pi n x dx . \tag{4}$$

Магнитный момент этого тока $d\,p_m = S(x)\,dI$,
где $S(x)$ - площадь; $S(x) = \pi x^2$;

$$d\,p_m = 2\pi^2 n\,Д\,\rho\,x^3\,dx. \qquad (5)$$

Интегрируя (5) по x в пределах от 0 до R, получаем:

$$p_m = \int_0^R 2\pi^2 n\,Д\,\rho\,x^3 dx = \pi^2 n\,Д\,\rho\frac{R^4}{2}. \qquad (6)$$

Полный заряд диска равен Q, поэтому $\pi R^2 \rho = Q$.
Подставляя это в (6), получим

$$p_m = \frac{\pi}{2} R^2 n\,Q. \qquad (7)$$

Момент импульса L диска связан с моментом инерции I и частотой n:

$$L = 2\pi I n; \qquad I = \frac{1}{2} m R^2. \qquad (8)$$

Деля (7) на (8), получаем

$$\frac{p_m}{L} = \frac{Q}{2m}$$

После подстановки численных значений найдем

$$p_m = 1{,}5 \times 10^{-6}\ Ам^2, \qquad \frac{p_m}{L} = 0{,}83 \times 10^{-7}\ Кл/кг.$$

5.2.5. *Рамка из тонкого провода в виде квадрата массой m=4 г свободно подвешена на неупругой нити в однородном магнитном поле. По рамке течет ток силой I=5 А. Период малых крутильных колебаний T относительно оси рамки равен 2 с.*

Найти магнитную индукцию B?

Дано: m=4 г = 0,004 кг,
I=5 А,
T=2 с.

Найти: B = ?

Решение

Обозначим длину стороны квадрата a. Магнитный момент рамки с током

$$p_m = I a^2.$$

Во внешнем магнитном поле на рамку действует механический момент M:

$$M = I a^2 B \sin\alpha. \qquad (1)$$

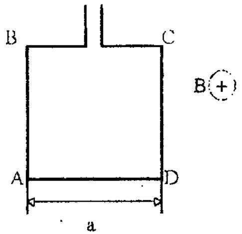


Рис.5.4

При малых углах α, $\sin\alpha$ можно записать уравнение колебаний, являющееся уравнением моментов:

$$I_м \frac{d^2\alpha}{dt^2} = Ia^2B\alpha, \qquad (2)$$

где $I_м$ - момент инерции рамки. Из геометрических соображений находим $I_м$:

$$I_м = 2\left(I_{ав} + I_{вс}\right) = 2\left[\frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{4}a^2\right] = \frac{1}{6}ma^2 \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (2) запишем уравнение колебаний в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{Ia^2B}{I_м}\alpha = \frac{6IB}{m}\alpha = \omega^2\alpha, \qquad (4)$$

где $\omega = 2\pi / T$ - циклическая частота колебаний.

Учитывая связь ω с T, получаем

$$B = \frac{4\pi^2 m}{6T^2 I} = 1{,}32 \times 10^{-3}.\ Тл.$$

5.2.6. *В однородное магнитное поле с магнитной индукцией 0,4 Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течение 6 мкс включается электрическое поле напряженностью 300 В / м в направлении, параллельном магнитному полю. Определить шаг винтовой траектории частицы.*

Дано: B = 0,4 Тл,

t_1 = 6 мкс = 6 x 10^{-6} с.

E = 300 В / м.

Найти: l = ?

Решение

На частицу действует сила Лоренца. Направим ось x вдоль вектора $\vec{B}$. Под действием индукции магнитного поля частица будет совершать движение по траектории, проекция которой на плоскость, нормальную к $\vec{B}$, является окружностью. По второму закону Ньютона

$$ma = q\,\upsilon_\perp B, \qquad (1)$$

где a – центростремительное ускорение,

q - заряд частицы,

$\upsilon_\perp$ – перпендикулярная оси x составляющая скорости.

Учтем, что $a = \omega\,\upsilon_\perp$, тогда

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

Кроме того, $\omega = 2\pi / T$. Значит, период обращения

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (2)$$

Под действием электрического поля частица ускорялась в течение времени t_1 вдоль оси x. При этом на нее действовала сила

$$F = qE.$$

По истечении времени t_1 x – компонента скорости оказалась равной

$$V_x = a\,t_1 = \frac{qE}{m}t_1. \qquad (3)$$

Умножая (3) на (2), найдем длину поля винтовой линии, по которой движется частица после выключения электрического поля:

$$l = V_x T = \frac{2\pi E}{B}t_1.$$

Подставляя численные значения, находим ответ:

$$l = 2{,}8 \times 10^{-2}\ \text{м} = 2{,}8\ \text{см}.$$

5.2.7. *В плоскости квадратной рамки с омическим сопротивлением 7 Ом и стороной a=20 см расположен на расстоянии r_0=20 см от рамки прямой бесконечный проводник. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I=\alpha t^3$, где $\alpha = 2\ А / с^3$. Проводник параллелен одной из сторон рамки. Определить силу тока в рамке в момент времени t=10 с.*

Дано: R=7 Ом,

$a = 0{,}2$ м,

$r_0 = 0{,}2$ м,

$I=\alpha t^3$,

$\alpha = 2$ А / с^3,

$t=10$ с.

Найти: I = ?

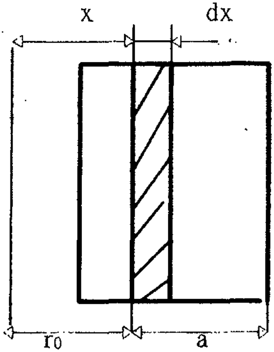


Рис.5.5

Решение

Вследствие изменения силы тока в проводнике, магнитный поток через рамку изменяется, и в ней возникает индукционный ток. Рамка находится в неоднородном магнитном поле. Разделим площадь рамки на столь узкие полоски, чтобы в пределах каждой полоски магнитное поле можно было считать однородным. Элементарный магнитный поток сквозь узкую полоску

$$d\Phi = B a\, dx = \frac{\mu_0 I_a dx}{2\pi x}. \qquad (1)$$

Интегрируя (1) по x в пределах от r_0 до r_0+a, находим

$$\Phi = \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{\mu_0 I_a dx}{2\pi x} = \frac{\mu_0 a \alpha \ln(1 + a/r_0)}{2\pi} t^3. \qquad (2)$$

Из закона Фарадея определяем ЭДС индукции

$$\varepsilon_n = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3\mu_0\, a\, \alpha \ln(1 + a/r_0)}{2\pi} t^2$$

и силу тока

$$I = \frac{|\varepsilon_n|}{R} = \frac{3\mu_0\, a\, \alpha \ln(1 + a/r_0)}{2\pi R} t^2 \;; \qquad I \approx 2{,}4 \times 10^{-6}\ \text{A}.$$

5.2.8. *По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m. Сверху шины замкнуты на конденсатор емкостью C. Расстояние между шинами l. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а так же самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти ускорение перемычки.*

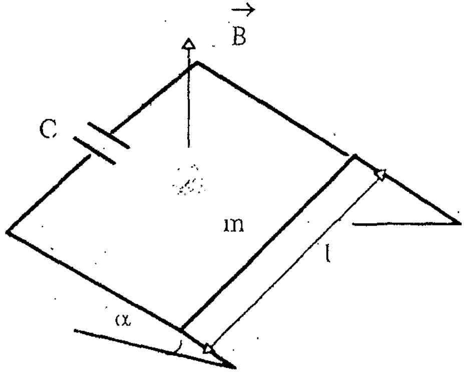


Рис.5.6

Решение

Изменение магнитного потока через контур обусловлено движением перемычки. По закону Ома для неоднородного участка ЭДС индукции ε_n в любой момент времени равна разности потенциалов $\Delta\varphi$ на обкладках конденсатора:

$$\varepsilon_n = \Delta\varphi$$

Но $\Delta\varphi = \theta/C$. Следовательно, сила индукционного тока в контуре

$$I = \frac{d\theta}{dt} = C\frac{d(\Delta\varphi)}{dt} = C\frac{d\varepsilon_n}{dt} \ .$$

Так как магнитное поле однородно, то $\varepsilon_n = B\frac{dS}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Bl\upsilon$,

где S – площадь контура. Таким образом,

$$I = CSl\frac{d\upsilon}{dt} = CBla ,$$

где a – искомое ускорение перемычки.

На перемычку действуют две силы: сила тяжести mq и сила Ампера $IlB = CB^2l^2a$.

По второму закону Ньютона $ma = mq\sin\alpha - CB^2l^2a$.

Отсюда

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + CB^2l^2}.$$

Если бы на перемычку действовала сила трения, то легко показать, что

$$a = \frac{mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{m + CB^2l^2},$$

где f – коэффициент трения.

5.2.9. *Соленоид с индуктивностью L=0,1 Гн и сопротивлением R=0,02 Ом замыкается на источник ЭДС ε_0=2 В, внутреннее сопротивление, которого пренебрежимо мало. Какое количество электричества пройдет через соленоид за первые 5 с после замыкания?*

Дано: L=0,1 Гн,
R=0,02 Ом,
ε_0=2 В,
t=5 с.
Найти: Q = ?

Решение

При замыкании соленоида на ЭДС возникает ток замыкания

$$I = I_0\left(1 - e^{-(R/L)t}\right),$$

где $I_0 = \varepsilon_0 / R$ – установившееся значение тока в цепи, то есть в момент времени $t\to\infty$.

Разделим промежуток времени t на столь малые отрезки dt, чтобы в пределах каждого такого отрезка времени силу тока можно было считать приближенно постоянной. Тогда элементарное количество электричества dQ, которое пройдет через соленоид за этот промежуток времени dt будет равно

$$dQ = I\,dt = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)dt\,.$$

Отсюда после интегрирования по t находим:

$$Q = \int_0^5 \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)dt = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(t + \frac{L}{R}e^{-(R/L)t}\right)\Bigg|_0^5\,.$$

После подготовки численных значений величин получим:

$$Q = 181\ К.$$

5.2.10. *Заряженная частица движется по окружности радиусом R=1 см в однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл. Параллельно магнитному полю включено электрическое поле с напряженностью, зависящей от времени $E=\alpha t^2$, где α= 50 В / мс^2 В какой момент времени после включения поля кинетическая энергия частицы возрастает вдвое?*

Дано: R = 0,01 м,
B=0,1 Тл,
$E=\alpha t^2$,
α= 50 В / мс^2.
Найти: t_0 = ?

Решение

В отсутствие электрического поля частица двигалась по окружности под действием силы Лоренца с ускорением

$$a_1 = \frac{F_n}{m} = \frac{B\upsilon_1 q}{m}\,, \qquad (1)$$

где m и q – масса и заряд частицы,
υ_1 - скорость.

В данной ситуации сила действует перпендикулярно скорости. Поэтому ускорение частицы является центростремительным

$$a_1 = \frac{\upsilon_1^2}{R}\,. \qquad (2)$$

Приравниванием (1) и (2), находим скорость частицы

$$\upsilon_1 = \frac{RqB}{m}\,. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия частицы зависит от ее массы и скорости

$$E_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} .$$

После включения электрического поля в момент времени t=0 частица начинает ускоряться в направлении, параллельном $\vec{E}$. Ускорение ее в этом направлении

$$a_2 = \frac{qE}{m} = \frac{q\alpha t^2}{m} .$$

По истечении времени t_0 скорость ее станет равной

$$N_2 = \int_0^{t_0} a(t)\, dt = \frac{q\alpha}{3m} t_0^3 . \qquad (4)$$

Результирующий квадрат скорости примет значение

$$\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 ,$$

кинетическая энергия, соответственно, станет равной

$$E_2 = \frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2\right) .$$

Поскольку эта величина вдвое превышает первоначальную энергию, то $\upsilon_1 = \upsilon_2$.

С учетом выражений (3) и (4) получаем

$$\frac{RqB}{m} = \frac{q\alpha}{3m} t_0^3 .$$

После сокращения на q и m получаем значение t_0:

$$t_0 = \sqrt[3]{3RB/\alpha} = 0{,}039 \text{ с.}$$

5.2.11. *Два тока, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ток начал двигаться по окружности радиусом 7 см, второй - по окружности радиусом 3,5 см. Найти отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.*

Дано: R_1=0,07 м,
R_2= 0,035 м.

Найти: $\frac{m_1}{m_2} = ?$

Решение

Пройдя разность потенциалов U каждый ток приобретает кинетическую энергию

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = qU, \qquad (1)$$

где q – заряд иона, υ - его скорость.

Влетая в магнитное поле, заряд начинает двигаться по окружности, причем ускорение, сообщенное ему силой Лоренца, равно центростремительному ускорению, так как скорость и сила взаимно перпендикулярны:

$$\frac{q\upsilon B}{m} = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (2)$$

Выражая из (1) и (2) скорости и приравнивая их, получаем

$$\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{qBR}{m},$$

откуда

$$m = \frac{q}{2U}B^2R^2. \qquad (3)$$

Присвоив величинам в (3) индексы 1 и 2, возьмем отношение масс $\frac{m_1}{m_2}$ с учетом того, что заряд потенциалов и индукция поля одинаковы

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = 4.$$

5.2.12. *Соленоид, находящийся в диамагнитной среде, имеет длину l=50 см, площадь поперечного сечения 10 см² и число витков N=1200. Индуктивность соленоида L=36 мГц, а сила тока, протекающего по нему, I=0,8 А. Определить: 1) магнитную индукцию внутри соленоида, 2) намагниченность внутри соленоида.*

Дано: l=50 см = 0,5 м,
$S = 10\ см^2 = 10^{-3}\ м^2$,
N=1200,
$L = 3{,}6 \times 10^{-2}$ Гн,
I=0,8 А.

Найти: B, J = ?

Решение

Индуктивность соленоида связана с числом витков и геометрическими размерами посредством формулы

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}, \tag{1}$$

где μ - магнитная проницаемость среды.

Поскольку среда является диамагнитной, то μ не зависит от характеристик магнитного поля, создаваемого соленоидом.

Применяя к соленоиду теорему о циркуляции вектора напряжености магнитного поля, получим

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = IN; \qquad H = \frac{NI}{l}, \tag{2}$$

где контур L охватывает витки соленоида, проходя частично через него. При этом учитывается только та его часть, которая располагается внутри соленоида, где поле приблизительно однородно. Учитывая связь намагниченности с напряженностью, $J=(\mu-1)H$, и используя выражения (1) и (2), получим:

$$J = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)\frac{NI}{l}. \tag{3}$$

Связь индукции с напряженностью – $B = \mu_0 \mu H$. После подстановки сюда значения μ и H из (1) и (2) находим

$$B = \frac{LI}{NS}. \tag{4}$$

После подстановки в (3) и (4) численных значений величин, находим

$$J = 10{,}1 \text{ А/м}, \qquad B = 0{,}7 \text{ Тл}.$$

5.2.13. *Определить индуктивность фрагмента длиною l бесконечно длинного соленоида, если его сопротивление R, а абсолютной является проволока массой m.*

Решение

Индуктивность соленоида дается выражением

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2 S}{l}; \tag{1}$$

где N – число витков в фрагменте,

S – площадь сечения соленоида.

Приняв, что длина проволоки равна a, можно записать следующее соотношение

$$2\pi r = \frac{a}{N}, \qquad (2)$$

где r - радиус сечения соленоида.

В последнем соотношении длина одного витка приравнивается к полной длине провода, деленной на число витков. Выражая из (2) r и используя для S выражение $S = \pi r^2$, получим

$$S = \frac{a^2}{4\pi N^2}. \qquad (3)$$

Для нахождения a^2 запишем соотношение для сопротивления и массы проволоки:

$$R = \rho \frac{a}{S}; \qquad m = S a \gamma, \qquad (4)$$

где ρ – удельное сопротивление материала проволоки,

γ – его плотность.

Перемножая левые и правые части выражений (4), находим

$$m R = \rho \gamma a^2. \qquad (5)$$

Выражая из (5) a^2, подставляя затем в (3), а далее в (1), получаем окончательно:

$$L = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{m R}{\rho \gamma l}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чертов А. Г., Воробьев А. А.** Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.

2. **Иродов И. Е., Савельев И. В., Замша О. М.** Сборник задач по общей физике. – М.: Наука, 1975. – 320 с.

3. **Волькенштейн В. С.** Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1973. – 464 с.

4. **Беликов Б. С.** Решение задач по физике. Общие методы. – М.: Высшая школа, 1986. – 56 с

5. **Трофимова Т. И.** Сборник задач по курсу физики. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

СОДЕРЖАНИЕ