

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (филиал)  
ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

Г. Н. Талызов, В. Г. Кульков, М. М. Кумыш

# КУРС ЛЕКЦИЙ

ФИЗИКА. Часть 2.  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Учебное пособие*

РПК "ПОЛИТЕХНИК"  
Волгоград  
2003

УДК 53 (075.8)

Рецензенты:

зам директора по научной работе ВГИ ВолГУ, док. физ.-мат. наук, профессор  
В. В. Горяинов  
зав. кафедрой "Механики и материаловедения" филиала ГОУ ВПО Московско-  
го энергетического института в г. Волжском, док. тех. наук, профессор  
А. В. Вахобов

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета

Талызов Г.Н., Кульков В.Г., Кумыш М.М. Курс лекций. Физика. Часть 2.  
Электродинамика: Учеб. пособие / ВПИ (филиал), ВолгГТУ, Волгоград, 2003. -  
98 с.

ISBN 5-230-04189-7

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Небольшой объем учебного пособия достигнут с помощью тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Пособие может использоваться при проведении аудиторных практических занятий среди студентов технических специальностей вузов с дневной и вечерней формой обучения.

Ил.: 59. Табл - 5. Библиогр.: 4 назв.

ISBN 5-230-04189-7

- © Волгоградский государственный  
технический университет, 2003
- © Волжский политехнический  
институт, 2003

# 1. Электричество

## 1.1. Электрическое поле. Закон Кулона

В природе существуют два типа электрических зарядов, которые взаимодействуют между собой. Это взаимодействие сводится к их притяжению или отталкиванию друг от друга. Условно все заряды в природе делятся на два типа – положительные и отрицательные, притом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются. Электрическое взаимодействие осуществляется между зарядами как в некоторой среде (твердой, жидкой и газообразной), так и в вакууме. Исторически существовало две точки зрения на механизм электрического взаимодействия зарядов. Теория дальнего действия представляла действие одного заряда на другой непосредственно, без участия промежуточной среды, мгновенно с бесконечной скоростью.

Согласно же теории ближнего действия такое воздействие происходит с большой, но конечной скоростью путем участия кроме двух зарядов третьего объекта – электрического поля. Современная наука придерживается второй точки зрения.

Поле в отличие от вещества является особой формой материи. Его объективность обусловлена возможностью его обнаружения приборами, измерением его характеристик. Неизменное во времени поле изучает электростатика, изменяющееся – электродинамика.

Каждый заряд создает в окружающем его пространстве поле, и взаимодействие полей проявляется во взаимодействии зарядов.

Типичными носителями зарядов в веществе являются отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные протоны. Величина их заряда весьма мала и называется такой заряд – элементарным. Все заряженные тела имеют величину заряда, кратную элементарному.

Таким образом становится очевидным, что заряжаются тела путем добавления к ним или удаления от них определенного количества элементарных зарядов. Чаще всего, например, твердые тела приобретают заряд путем перемещения электронов, вследствие их большей подвижности, чем протонов или атомных ядер.

Величина заряда тела является релятивистски инвариантной, т.е. в любой системе отсчета одинакова и не зависит от ее скорости. Кроме того, имеет место закон сохранения заряда.

*Суммарный электрический заряд любой изолированной системы не изменяется во времени.*

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const}, \quad (1.1)$$

где  $q_i$  - величина  $i$ -го заряда.

Здесь речь идет только об изолированных системах, т.е. не способных обмениваться с окружающей средой носителями зарядов, а также о суммарном заряде системы. В отдельности отрицательный и положительный заряды системы (образующие каждый соответствующую подсистему) могут изменяться, например, благодаря рождению или аннигиляции электрон-позитронных пар, когда одновременно возникает или уничтожается пара зарядов - положительный и отрицательный. Но суммарный заряд при этом остается прежним.

Создать заряд на теле можно разными способами, основными из них являются следующие:

1) *Электризация трением.* При соприкосновении двух тел различной природы электроны, имеющие различную энергию в телах, частично переходят от одного тела к другому, понижая общую энергию системы. Происходит это только в точках непосредственного контакта тел, роль трения сводится лишь к увеличению площади контакта. При этом одно тело приобретает по-

ложительный заряд, а другое - отрицательный, так, например, в парах шелк – янтарь, шерсть – эбонит и т.д.

2) *Электризация влиянием или электростатическая индукция.* При приближении к незаряженному электронейтральному телу другого заряженного тела в первом из них происходит перераспределение зарядов вследствие их притяжения или отталкивания от заряда второго тела. Существенно то, что контакта между телами не происходит. Если, например, разделить первое тело на две части, то они останутся заряженными и после удаления второго тела.

В изучении взаимодействия зарядов удобно ввести понятие *точечного заряда*, размеры которого пренебрежимо малы, по сравнению с другими размерами, фигурирующими в данной задаче. Это понятие аналогично понятию материальной точки в механике. В обоих случаях речь идет о размерах тела, при этом нельзя исключать их основные характеристики – заряд или массу.

Основным законом в электростатике является закон Кулона.

*Два точечных заряда взаимодействуют в вакууме с силой прямо пропорциональной произведению их величин и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила направлена вдоль прямой их соединяющей.*

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

где  $r$  - расстояние между зарядами.

В системе СИ для коэффициента  $k$  справедливо выражение:

$$k = 1/4\pi\epsilon_0,$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  - электрическая постоянная.

Закон Кулона в этом случае принимает вид:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}. \quad (1.2)$$

За единицу измерения заряда в системе СИ принимают кулон.

Сила притяжения считается отрицательной и соответствует разноименным зарядам.

Если одно из тел нельзя считать точечным, то его необходимо разбить на фрагменты, которые можно считать точечными. Подсчитав силу взаимодействия каждого фрагмента, необходимо найти их векторную сумму, действующую на второй векторный заряд. Аналогично поступают и в случае двух тел конечных размеров.

## 1.2. Напряженность электрического поля. Непрерывное распределение зарядов. Принципы суперпозиции полей

Согласно закону Кулона (1.2.) сила, действующая на точечный заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ , зависит как от величины  $q_2$ , так и от свойств поля заряда  $q_1$  в месте нахождения заряда  $q_2$ .

Для характеристики только свойств поля удобно ввести новую величину.

*Напряженностью электрического поля называется величина, равная отношению силы, действующей на точечный заряд в поле, к величине этого заряда:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (1.3)$$

Единицей напряженности можно считать Н/Кл, но принято ее измерять в единицах В/м.

Принимая во внимание (1.2) и (1.3), находим напряженность поля точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \quad (1.4)$$

Поскольку напряженность – величина векторная, то она подчиняется законам векторной алгебры. В частности, справедлив принцип суперпозиции.

*Напряженность поля, создаваемого системой зарядов в некоторой точке пространства, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в этой же точке.*

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (1.5)$$

Электрическое поле удобно изображать графически при помощи силовых линий или линий напряженности.

*Линией напряженности называется воображаемая линия, касательная к которой направлена также как и вектор напряженности поля в этой же точке.*

О величине напряженности можно судить по густоте силовых линий. Чем она больше, тем выше напряженность. Эти линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Если заряды только одного знака, то одним концом линии уходят в бесконечность, где и предполагается наличие зарядов противоположного знака.

Понятие точечного заряда является вспомогательным, упрощенным. На практике мы имеем дело с зарядами, распределенными по некоторой области. Характер распределения задается плотностью.

*Объемной плотностью заряда называется отношение заряда к элементу объема, в котором он находится.*

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}. \quad (1.6)$$

*Поверхностной плотностью заряда называется отношение заряда к элементу плотности, на котором он находится.*

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (1.7)$$

Линейной плотностью заряда называется отношение заряда к элементу длины линии, на которой он находится.

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad [\lambda] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}. \quad (1.8)$$

Если заряд распределен равномерно, то плотности являются постоянными величинами. Тогда заряды можно найти из выражений:

$$q = \rho V; \quad q = \sigma S; \quad q = \lambda \ell. \quad (1.9)$$

Чтобы найти напряженность поля в точке  $\vec{r}$ , создаваемого распределёнными зарядами, необходимо произвести процедуру разбиения, приведенную в конце п.1.1. При бесконечно мелком разбиении сумма переходит в интервал по объему площади или линии. Тогда напряженность поля в точке  $\vec{r}$  дается выражениями:

$$E(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV}{4\pi\epsilon_0(\vec{r}' - \vec{r})^2}; \quad E(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{4\pi\epsilon_0(\vec{r}' - \vec{r})^2}; \quad E(\vec{r}) = \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') d\ell}{4\pi\epsilon_0(\vec{r}' - \vec{r})^2}. \quad (1.10)$$

Здесь  $\vec{r}'$  – координата текущей точки в области распределения заряда.

### 1.3. Электростатическая теорема Гаусса

Потоком вектора  $\vec{E}$  через площадку  $\Delta S$  называется величина  $E\Delta S \cos\alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{E}$  и единичным вектором нормали  $\vec{n}$  к  $\Delta S$ . Тогда поток через  $\Delta S$  можно записать как  $\vec{E} \vec{n} \Delta S$  или просто  $\vec{E} \Delta S$ . Понимая здесь произведение векторов как скалярное.

Поместим в центр воображаемой сферы радиуса  $R$  положительный точечный заряд  $q$  и найдем поток напряженности его поля через сферу. С учетом того, что в каждой точке сферы вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  параллельны, т.е.  $\cos\alpha = 1$ , находим полный поток как поверхностный интеграл (см. рис. 1.1):



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

здесь  $S$  – площадь сферы.

О величине потока можно судить по количеству силовых линий, пронизывающих сферу.

Полный поток не изменится если мы деформируем сферу в любую другую замкнутую поверхность  $\Sigma$ , если заряд по-прежнему остается внутри нее, т.к. количество пронизывающих эту поверхность силовых линий не меняется. В случае нескольких зарядов общий поток суммируется.

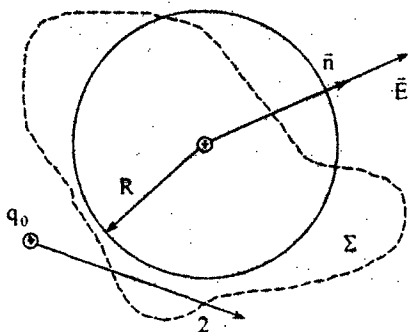


Рис. 1.1.

Если же рассмотреть заряд  $q_0$ , находящийся вне замкнутой поверхности  $\Sigma$ , то силовые линии сначала входят в нее, а затем выходят наружу, давая сначала отрицательный вклад (угол  $\alpha$  – тупой), а затем положительный (угол  $\alpha$  – острый) в общий поток. Поэтому суммарный поток напряженности поля заряда  $q_0$  равен нулю. Исходя из вышесказанного сформулируем теорему Гаусса:

*Поток напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен величине заряда, ограниченного этой поверхностью, деленному на  $\epsilon_0$ :*

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.12.)$$

Применив к левой части формулы Остроградского – Гаусса, правую представив через объемную плотность заряда, получим из (1.12):

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где  $V$  – объем, ограниченный замкнутой поверхностью.

Вследствие произвольности выбора этого объема подинтегральные выражения равны:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

Выражение (1.12) представляет теорему Гаусса в интегральной, а (1.13) – в дифференциальной формах.

#### 1.4. Примеры использования теоремы Гаусса для расчета напряженности поля

Использование теоремы Гаусса позволяет рассчитать напряжение поля во многих случаях распределения зарядов. Рассмотрим следующие простейшие случаи.

1) Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости. Построим цилиндр, вырезающий на плоскости площадку  $\Delta S$ , согласно рис. 1.2. Его образующая нормальна к плоскости. По соображениям симметрии, напряженность  $\vec{E}$  также нормальна к плоскости. Поэтому поток через боковую поверхность цилиндра равен нулю. Тогда полный поток через всю поверхность цилиндра обусловлен только вкладом его торцов площади  $\Delta S$ . Заряд внутри него  $\Delta q = \sigma \cdot \Delta S$ .

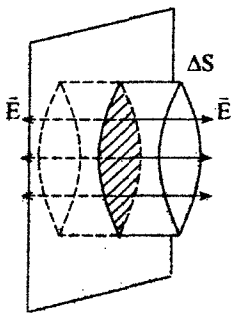


Рис. 1.2

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Напряженность поля в этом случае не зависит от координаты точки, т.е. поле однородно.

Однородным называется поле, напряженность которого во всех точках пространства имеет одинаковые величину и направление, т.е.  $\vec{E} = \text{const}$ .

2) Напряженность поля между двумя параллельными разноименно заряженными плоскостями. Согласно принципу суперпозиции и рис. 1.3 напряженность в областях вне плоскостей I и III равна нулю, а в области II между ними – удвоенному вкладу от каждого:

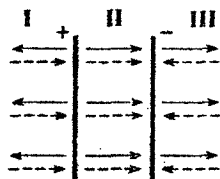


Рис. 1.3

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.15)$$

3) Поле равномерно заряженной линии. Пусть нить заряжена с линейной плотностью  $\lambda$ . Опишем вокруг её участка цилиндр радиуса  $r$  и высотой  $\ell$  (рис. 1.4). По аналогичным соображениям симметрии общий поток напряженности обусловлен только боковой поверхностью, где вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен ей.

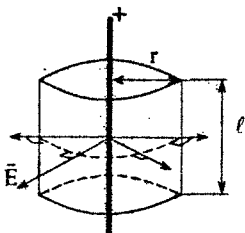


Рис. 1.4

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell = \frac{\lambda \cdot \ell}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}. \quad (1.16)$$

4) Поле равномерно по объему заряженного шара. Пусть объемная плотность заряда  $\rho = \text{const}$ . Рассмотрим две ситуации.

Поле внутри шара. Выбираем сферу радиуса  $r'$  (рис. 1.5) и находим поток  $\vec{E}$  проходящий через неё, создаваемый зарядом внутри этой сферы, используя симметрию задачи:

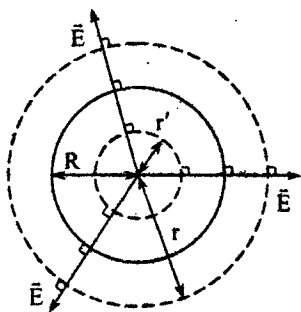


Рис. 1.5

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}' = E \cdot 4\pi r'^2 = \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r'^3}{\epsilon_0}, \quad (1.17)$$

но

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}. \quad (1.18)$$

Из (1.17) и (1.18) получаем:

$$E = \frac{q \cdot r}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^3}. \quad (1.19)$$

Поле вне шара. Этот случай эквивалентен полю точечного заряда, находящегося в центре сферы:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}. \quad (1.20)$$

Результирующая напряженность зависит от расстояния  $r$  до центра шара согласно графику на рисунке 1.6. В точке  $r = R$  обе формулы (1.19) и (1.20) совпадают.

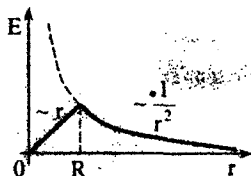


Рис. 1.6

## 1.5. Потенциал электростатического поля. Энергия системы зарядов

Пусть заряд  $q$  перемещается во внешнем поле вдоль линии  $L$ . При этом силы поля совершают работу, равную разности энергии начальной и конечной точек.

$$A = W_1 - W_2 = \int_L \vec{F} d\vec{l} = q \int_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.21)$$

Работа, как и энергия заряда в поле зависит от его величины. Удобно ввести физическую характеристику поля, не связанную с величиной заряда.

*Потенциалом электростатического поля называется физическая величина, равная отношению энергии заряда в поле к величине этого заряда.*

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Поскольку потенциальная энергия  $W$  определяется с точностью до произвольной постоянной, аналогично определяется и потенциал. Выбор начала отсчета потенциала называется его калибровкой. Она заключается в том, что некоторой избранной точке приписывается значение потенциала, равное нулю, и тогда потенциалы остальных точек будут отсчитываться от этой точки. Ситуация здесь аналогична отсчету высоты расположения точки над Землей относительно ее поверхности или другого уровня. Следует заметить, что разность потенциалов двух точек не зависит от выбора нуля и даже не нуждается в этом, как и разность высот.

Найдем потенциал поля точечного заряда  $q$ . Выберем начало отсчета потенциала так, чтобы бесконечно удаленная точка имела потенциал  $\varphi_\infty = 0$ . Тогда для точки  $0$  с координатой  $\vec{r}$ :

$$A = W_0 - W_\infty = W_A,$$

$$\varphi_A = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{q \cdot dr}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}. \quad (1.22)$$

Принцип суперпозиции полей для потенциала формулируется так:

*Потенциал произвольной точки поля системы точечных зарядов равен алгебраической сумме потенциалов каждого из зарядов в отдельности.*

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.23)$$

Изменение потенциала на пути  $L$ :  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$  тогда запишется в виде:

$$\Delta\varphi = -\int_L \vec{E} d\vec{\ell}. \quad (1.30)$$

Обратная связь имеет вид:

$$E = -\text{grad}\varphi. \quad (1.31)$$

*Эквипотенциальной называется поверхность, образованная точками, имеющими одинаковый потенциал в электростатическом поле.*

Так например, эквипотенциальными поверхностями поля точечного заряда являются сферы. Если их строить через определенный шаг с постоянной разностью потенциалов, то густота их расположения будет указывать на интенсивность изменения потенциалов, а значит, согласно (1.31), и на величину  $\vec{E}$  (см. рис. 1.7). Вектор  $\vec{E}$  в любой точке нормален к эквипотенциальной поверхности.

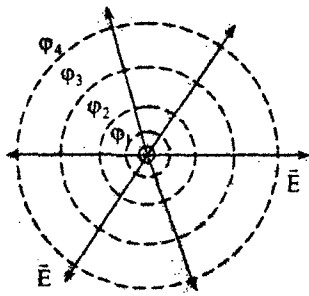


Рис. 1.7

Если заряд в электростатическом поле опишет замкнутую траекторию, то есть вернется в исходную точку, то, согласно (1.21), работа  $A = 0$ .

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0. \quad (1.32)$$

Применив к циркуляции (1.32) теорему Стокса, получим:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.33)$$

Поле, обладающее таким свойством, называется потенциальным. Т.о. электростатическое поле – потенциальное. Работа, совершаемая в таком поле, зависит только от положения начальной и конечной точек траектории, но не зависит от ее формы.

В самом деле для контура 1-2-1 (рис. 1.8) работа равна нулю:

$$A = A_{1a2} + A_{2b1} = 0.$$

Но  $A_{2b1} = -A_{1b2}$ , тогда  $A_{1a2} = A_{1b2}$ .

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет потенциал. Для этого подставим в (1.13) формулу (1.31):

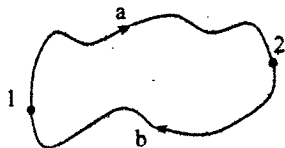


Рис. 1.8

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.34)$$

Оператор  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  называется оператором Лапласа и обозначается как  $\nabla$  ( $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  в декартовой системе координат). Тогда (1.34) имеет

вид:

$$\nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.35)$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона.

Если в пространстве заряд отсутствует, то (1.35) принимает вид:

$$\nabla \varphi = 0. \quad (1.36)$$

Это уравнение называется уравнением Лапласа. Оба эти уравнения являются дифференциальными второго порядка в частных производных. Зная распределение плотности заряда  $\rho$  в пространстве из уравнения (1.35), в принципе, можно найти распределение потенциала.

Пусть в пространстве находятся  $N$  точечных зарядов. Найдем их общую потенциальную энергию взаимодействия  $W$ :

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{ik}}, \quad (1.37)$$

здесь  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $i$ -го в точке, где он находится.

$$\varphi_i = \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{ik}};$$

где  $r_{ik}$  – расстояние между зарядами  $i$  и  $k$ . Множитель  $1/2$  появляется вследствие того, что в сумме два раза учитываются одинаковые пары, такие как 1-3 и 3-1.

### 1.6. Диполь. Мультиполи

Диполем называется система, состоящая из двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, разделенных на расстояние  $\ell$ . Его характеристикой является дипольный момент  $\vec{p} = q\vec{\ell}$ , где  $\vec{\ell}$  – вектор, проведенный от отрицательного к положительному заряду.

Найдем потенциал поля диполя на больших расстояниях от него, используя принцип суперпозиции (рис. 1.8):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^- - r^+}{r^- \cdot r^+}.$$

Если  $r \gg \ell$ , то  $r^+ r^- \cong r^2$ ,

$$r^- - r^+ = (r^- - r) + (r - r^+) = \ell \cos \theta.$$

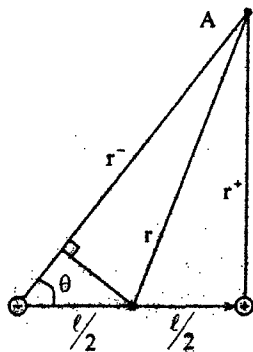


Рис. 1.8



Тогда:

$$\varphi = \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}. \quad (1.38)$$

Потенциал поля диполя пропорционален  $1/r^2$  в отличие от поля точечного заряда. Объясняется это тем, что разноименные заряды частично компенсируют поля.

Напряженность поля диполя удобно искать в сферической системе координат с осью симметрии вдоль диполя (рис. 1.9). В локальном базисе, как видно из рисунка, с учетом симметрии  $E_z = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Используя (1.31), находим компоненты напряженности:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}.$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (1.39)$$

Напряженность поля диполя убывает пропорционально  $1/r^3$ . Энергия диполя складывается из энергии его зарядов во внешнем поле:

$$W = W^+ + W^- = q\varphi_2 - q\varphi_1.$$

Но  $\varphi_2 - \varphi_1 = -E \cdot \ell \cos \alpha$  в однородном внешнем поле.

Окончательно:

$$W = -qE \cdot \ell \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (1.40)$$

Отсюда следует, что наименьшей энергией обладает конфигурация диполя, когда его момент сонаправлен с напряженностью поля.

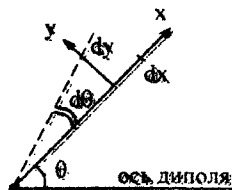


Рис. 1.9

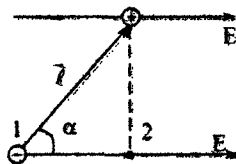




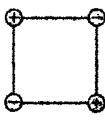
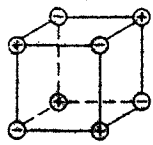
Рис. 1.10

Поле произвольной системы зарядов можно разложить в ряд так, что в выражении для его потенциала будут присутствовать члены  $\approx 1/r$ , что отвечает полю суммарного некомпенсированного заряда,  $\approx 1/r^2$  – для поля дипольных моментов,  $\approx 1/r^3$  – для поля т.н. квадрупольных моментов и т.д. для полей мультипольных моментов высших порядков. В связи с этим одиночный заряд называют – монополю, приписывая ему мультипольный момент нулевого порядка – электрический заряд; диполю – мультипольный момент первого порядка и т.д.

Простейшие конфигурации мультиполей приведены в табл. 1.1. Для каждого мультиполя дипольные моменты предыдущих моментов равны нулю. Мультипольные моменты второго и более порядков имеют более сложную природу. Их величины оказываются тензорными.

Свойства диполей

Табл. 1.1

Мультиполь	монополь	диполь	квадруполь	октуполь
Конфигурация				
Потенциал	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$	$1/r^4$
Напряженность	$1/r^2$	$1/r^3$	$1/r^4$	$1/r^5$

### 1.7. Электрическое поле в диэлектриках

По сравнению с вакуумом электрическое поле в диэлектриках имеет более сложное описание. Под воздействием внешнего поля каждая молекула диэлектрика либо приобретает, либо изменяет свой дипольный момент. Причем его величина часто пропорциональна напряженности:

$$\bar{p}_0 = \alpha \epsilon_0 \bar{E}. \quad (1.41)$$

Коэффициент  $\alpha$  называется *поляризуемостью*. Такие дипольные моменты, складываясь, дают отличную от нуля величину дипольного момента всего образца, называемую *вектором поляризации*:

$$\bar{P} = \sum_i \bar{p}_{0i}. \quad (1.42)$$

Если эту величину отнести к единице объема, получим *поляризованность*:

$$\bar{p} = \frac{\bar{P}}{V}. \quad (1.43)$$

С учетом (1.41) можно записать:

$$\bar{p} = \chi \epsilon_0 \bar{E}, \quad (1.44)$$

где  $\chi$  - восприимчивость диэлектрика.

Процесс возникновения дипольного момента в образце диэлектрика называется его поляризацией. Внутри диэлектрика могут находиться два вида зарядов:

- Связанные заряды – те, которые входят в состав молекул и не могут путем электризации покинуть их пределы. Это заряды ядер и электронных оболочек атомов.

- Свободные заряды – те, которые внесены в диэлектрик извне. Они могут перемещаться из одной области в другую, а также совсем покинуть образец. Истинное поле в диэлектрике  $\bar{E}$  образовано суперпозицией полей свободных  $\bar{E}_0$  и связанных  $\bar{E}'$  зарядов. Путем их усреднения получается макроскопическое поле.

В процессе поляризации на поверхности образца возникает связанный заряд вследствие не распределения его в молекулах. Найдем поверхностную плотность  $\sigma'$  связанных зарядов. Вектор поляризации выделенного на рис. 1.11 объема равен:

$$P = pV = pS\ell. \quad (1.44)$$

С другой стороны этот вектор можно представить как дипольный момент двух зарядов на поверхности:

$$P = S\sigma' \frac{\ell}{\cos \alpha}. \quad (1.45)$$

Приравнивая (1.44) и (1.45), получаем:

$$\sigma' = p \cos \alpha = p_n. \quad (1.46)$$

Т.е. поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей поляризованности.

При неоднородной поляризации в объеме диэлектрика возникает также объемный связанный заряд. Найдем его плотность.

Пусть внутри диэлектрика выделена произвольная замкнутая поверхность  $S$  (рис. 1.12). При включении внешнего поля связанные заряды частично смещаются (положительные – вдоль поля, отрицательные – против) относительно прежних положений. При этом заряды вблизи выделенной поверхности проходят через неё. Для элемента

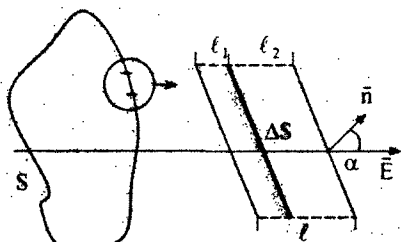


Рис. 1.12

$\Delta S$  количество прошедшего через него положительного заряда  $\Delta q^+ = n\Delta V^+ e$ .

Здесь  $\Delta V^+$  - объем области, где находятся такие заряды,  $n$  - их концентрация.

$\Delta V^+ = \Delta S \cdot \ell_2 \cdot \cos \alpha$ , а  $\ell_2$  - смещение положительных зарядов.

Аналогичное выражение получается и для отрицательных зарядов, смещение которых внутри области эквивалентно смещению таких же положи-

тельных зарядов из неё. В результате элемент  $\Delta S$  дает вклад в изменение заряда внутри области:

$$\Delta q = -ne\Delta S \cos \alpha (\ell_1 + \ell_2) = -\bar{\rho} \Delta \bar{S}.$$

Так как  $\ell_1 + \ell_2 = \ell$ ,  $e\ell = p_0$ , то  $p_0 n = p$ . Минус связан с тем, что выход положительного заряда оставляет в области заряд отрицательный. Полный заряд в области:

$$q' = -\int_S \bar{\rho} d\bar{S}. \quad (1.47)$$

Запишем левую часть через объемную плотность заряда, а правую преобразуем по формуле Остроградского – Гаусса:

$$\int_V \rho' dV = -\int_V \operatorname{div} \bar{\rho} \cdot dV.$$

Откуда, вследствие произвольности объема:

$$\rho' = -\operatorname{div} \bar{\rho}. \quad (1.48)$$

Если  $\bar{\rho} = \text{const}$ , то  $\rho' = 0$ .

### 1.8 Электрическая индукция

Наличие в диэлектрике свободных и связанных зарядов требует видоизменить формулу (1.13):

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho + \rho'}{\epsilon_0}, \quad (1.49)$$

где  $\rho$  и  $\rho'$  - плотности свободных и связанных зарядов.

С учетом (1.48) перепишем:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \bar{E} = \rho - \operatorname{div} \bar{\rho} \quad \text{или} \quad \operatorname{div} (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{\rho}) = \rho.$$

Используем (1.44):

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \bar{E} (1 + \chi)) = \rho. \quad (1.50)$$

Обозначим  $1 + \chi = \epsilon$ , а также

$$\epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \vec{D}. \quad (1.51)$$

Тогда выражение (1.50) примет вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.52)$$

По форме это выражение аналогично (1.13). Величина  $\vec{D}$  называется электрической индукцией или электрическим смещением. Последнее название связано со смещением связанных зарядов в диэлектрике. Исходя из аналогии (1.13) и (1.52) можно заключить, что для электрической индукции  $\vec{D}$  справедлива теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (1.53)$$

*Поток электрической индукции через замкнутую поверхность равен свободному заряду, ею ограниченному.*

В дифференциальной форме (1.53) имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.54)$$

где справа стоит плотность свободных зарядов.

Подобно силовым линиям, электрическое поле можно графически представить при помощи линий электрической индукции. Разница заключается в том, что последние могут начинаться и оканчиваться только на свободных зарядах. В этом заключается удобство этой величины, т.к. при её использовании нет необходимости рассматривать распределение связанных зарядов, обусловленное внутренней структурой вещества.

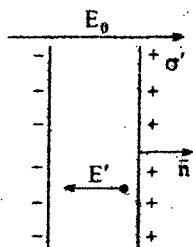


Рис. 1.13

Определим физический смысл величины  $\epsilon$ . Для этого рассмотрим плоскопараллельную пластину диэлектрика, помещенную во внешнее поле на-

пряженностью  $E_0$  с направлением вдоль нормали  $\vec{n}$  к пластине (рис. 1.13). Под его действием свободные заряды в пластине перераспределяются так, что на поверхности возникает их плотность  $\pm \sigma'$ . Это приводит к возникновению напряженности поля связанных зарядов внутри пластины, равной, согласно (1.15)  $E' = \sigma' / \epsilon_0$ . Тогда результирующее поле в пластине определится из суперпозиции внешнего и внутреннего полей:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (1.55)$$

Используя выражения (1.46), (1.44) и учитывая, что  $p_n = p$ , получим:

$$E = E_0 - \chi E; \quad (1 + \chi)E = E_0; \quad (1.56)$$

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (1.57)$$

Таким образом,  $\epsilon$  показывает во сколько раз поле внутри диэлектрика слабее, чем в вакууме. Величина  $\epsilon$  называется относительной диэлектрической проницаемостью данного вещества.

### 1.9 Условия сопряжения векторов напряженности и индукции на границах раздела сред

Рассмотрим плоскую границу раздела двух диэлектрических сред, занимающих соответствующие полупространства. Считаем, что эта граница не заряжена, т.е. не несет на себе свободных зарядов. Для компонент напряженности и индукции поля вблизи границы справедливы определенные взаимосвязи по обе стороны, называемые условиями сопряжения.

Циркуляция напряженности, согласно (1.32), по любому контуру равна нулю. Найдем её для контура 1-2-3-4 (рис. 1.14):

$$\oint_L \vec{E} dl = \int_{1-2} \vec{E} dl + \int_{2-3} \vec{E} dl + \int_{3-4} \vec{E} dl + \int_{4-1} \vec{E} dl. \quad (1.58)$$

В качестве контура выбираем прямоугольник со сторонами  $b$  и  $a$ , причем размер  $b$  будем уменьшать, устремив его к нулю, чтобы стороны 1-2 и 3-4 лежали вблизи границы. В этом случае второе и четвертое слагаемые устремятся к нулю, а первое и третье примут вид:

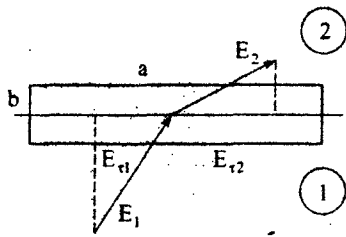


Рис. 1.14

$$E_{t1} \int_{1-2} dl + E_{t2} \int_{3-4} dl = aE_{t1} - aE_{t2} = 0, \quad (1.59)$$

в соответствии с (1.32). Минус возникает оттого, что отрезок 3-4 проходится в направлении, обратном к отрезку 1-2. Из (1.59) заключаем:

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad (1.60)$$

здесь индекс  $t$  означает касательную компоненту вектора, а 1 и 2 нумеруют среды.

Соотношение (1.60) для  $D$  имеет вид:

$$\frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2}. \quad (1.61)$$

Из (1.53) при условии  $q = 0$  (нейтральная граница) можно получить для поверхности цилиндра с основанием  $S$  и высотой  $b$  (см. рис.

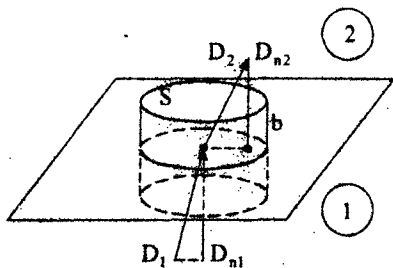


Рис. 1.15

1.15) полный поток  $\vec{D}$ , равный нулю. Аналогично, уменьшая высоту  $b$  до нуля, найдем, что полный поток обусловлен только верхним и нижним основаниями:



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_{S_{\text{нижн}}} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_{\text{верх}}} \vec{D} d\vec{S} = D_{n1} S - D_{n2} S = 0. \quad (1.62)$$

Здесь учтено, что направления нормалей для нижнего и верхнего торца противоположны. Индекс  $n$  указывает на нормальную компоненту вектора. Из (1.62) имеем:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad (1.63)$$

$$E_{n1} \epsilon_1 = E_{n2} \epsilon_2. \quad (1.64)$$

Из рисунка 1.16 получим соотношение для углов между линией индукции и нормалью к границе с использованием (1.61):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{D_{t1}}{D_{n1}} = \frac{D_{t2}}{D_{n2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{D_{t1}}{D_{n1}} = \frac{D_{t2}}{D_{n2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

которое выражает правило преломления линий индукции.

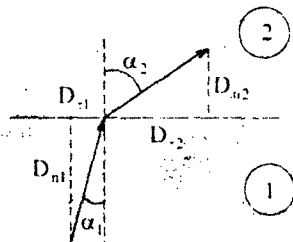


Рис. 1.16

### 1.16 Механизмы поляризации диэлектриков

Во внешнем электрическом поле внутри диэлектрика происходят процессы, приводящие к возникновению поляризации и ослаблению напряженности. В зависимости от внутреннего строения материи эти процессы носят различный характер. Соответственно существуют различные типы поляризации диэлектриков.

**Электронная поляризация.** Молекулы таких веществ не обладают собственным дипольным моментом. При включении поля каждая из них приобретает собственный момент; согласно (1.41) и с учетом (1.43)  $\chi = n\alpha$ , где  $n$  — плотность молекул, т.е. их число в единице объема. Этот тип поляризации присущ всем веществам, но иногда мало заметен на фоне других, более силь-

ных. Образование элементарных диполей можно пояснить на примере нейтральных атомов. В отсутствии поля в центрально – симметричном атоме электронная плотность равномерно распределена по сфере с центром в ядре, центры положительного и отрицательного зарядов в атоме совпадают и дают нулевой дипольный момент. Во внешнем поле как электронное облако, так и ядро смещаются в противоположных направлениях так, что центры положительных и отрицательных зарядов теперь не совпадают, что приводит к возникновению дипольного момента атома. Примерами веществ с таким типом поляризации являются  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ , инертные газы и т.д.

*Ориентационная поляризация.* Молекулы таких веществ имеют собственные дипольные моменты даже в отсутствии внешнего поля. В условиях хаотического движения их ориентация также хаотична, и поэтому суммарный момент равен нулю. При включении внешнего поля происходит частичная ориентация моментов молекул вдоль поля. Ориентирующему действию поля противодействует хаотическое тепловое движение и разориентация. По мере роста напряженности поля ориентация молекул все более упорядочивается. Поляризованность вещества растет, приближаясь к насыщению (рис. 1.17). Такие процессы происходят практически только в жидких и газообразных состояниях, т.к. в твердом молекулы жестко связаны друг с другом, что затрудняет их поворот. Примерами таких веществ являются  $H_2O$ ,  $HCl$ ,  $CO$ , и т.д.

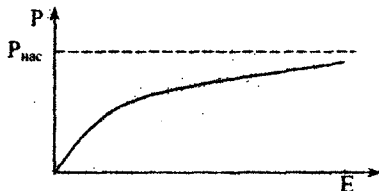


Рис. 1.17

*Ионная поляризация.* В ионных кристаллах, вследствие симметрии, полный дипольный момент вне поля равен нулю. Ионный кристалл можно представить как решетку, состоящую из отрицательно заряженных ионов. Во

внешнем поле происходит их взаимное смещение, что и приводит к появлению поляризованности. Примерами таких кристаллов являются NaCl, CsF и др.

**Сегнетоэлектрическая поляризация.** Некоторые кристаллы обладают весьма большими значениями относительной диэлектрической проницаемости, которая в свою очередь зависит от предыстории образца и значения напряженности внешнего поля. Исторически первым веществом, где был обнаружен такой тип поляризации, была сегнетова соль, откуда и произошло его название.

С точки зрения внутреннего строения сегнетоэлектрик представляет собой совокупность областей, называемых доменами. Молекулы каждого из доменов имеют строго параллельные моменты, а сам домен поляризован до насыщения. Углы между моментами соседних доменов имеют различные значения, так что в целом макроскопический образец не поляризован. При включении внешнего поля происходит частичный поворот моментов доменов к ориентации поля, а также рост доменов с благоприятной ориентацией за счёт других. Всё это приводит к резкому возрастанию поляризованности.

Для сегнетоэлектриков характерно явление гистерезиса – запаздывания отклика его на внешнее воздействие и его неоднозначность. На рисунке 1.18 изображена петля гистерезиса. Из начального состояния (точка 0) поляризация происходит по кривой OA. В точке A и напряженность поля, и поляризованность имеют максимальные значения. По мере уменьшения E поляризованность  $p$  уменьшается в соответствии с верхней кривой AB. При выключении поля, когда  $E = 0$ , образец имеет остаточную поляризованность  $p_0$ .

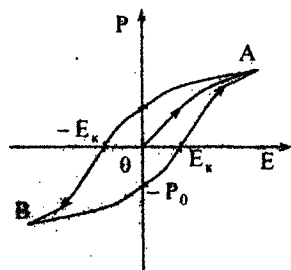


Рис. 1.18

убрать которую можно только включив обратную напряженность величины  $-E_x$ , называемую коэрцитивной силой. Возврат из точки В в точку А происходит по нижней кривой ВА. Таким образом, весь цикл переполяризации изображается в виде петли.

Можно показать, что площадь петли пропорциональна (в некоторых единицах равна) плотности энергии, израсходованной на переполяризацию диэлектрика за один цикл, которая в конечном итоге уходит на его нагрев. Примеры сегнетоэлектриков приведены в таблице 1.2.

Некоторые свойства сегнетоэлектриков      Таблица 1.2.

Вещество	Химическая формула	$T_c$ , К	$P_s$ , Кл/м <sup>2</sup>
Триглицинсульфат	$(NH_2CH_2COOH)_3 \cdot H_2SO_4$	322	$2,8 \cdot 10^{-2}$ при 275К
Титанат бария	$BaTiO_3$	393	$2,6 \cdot 10^{-1}$ при 300К
Киобат калия	$KNiO_3$	710	$3,0 \cdot 10^{-1}$ при 600К
Сульфат аммония	$(NH_4)_2 \cdot SO_4$	223	$4,5 \cdot 10^{-3}$ при 220К
Сегнетова соль	$NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$	296/255	$2,5 \cdot 10^{-3}$ при 275К

Сегнетоэлектрическое состояние существует только при температурах ниже некоторой критической  $T_c$ , называемой температурой Кюри. При этой температуре происходит фазовый переход из сегнетоэлектрического состояния в параэлектрическое, когда домены разрушаются и тип поляризации сменяется на ориентационный. Лишь у сегнетовой соли таких температур две – сегнетоэлектрическое состояние существует только при температурах между ними. Значения  $T_c$  приведены в третьем столбце табл. 1.2., а значения поляризованности насыщения в каждом домене  $P_s$  приведены в столбце 4.

Сегнетоэлектрики применяют, например, для изготовления конденсаторов большой емкости с малыми размерами. Например,  $\epsilon$  керамик из титаната Ва или Sr может достигать 6000. Используют их в конденсаторных микрофонах, системах отклонений лазерных лучей и т.д.

## 1.11 Электрическое поле в проводниках

*Проводниками называются вещества, внутри которых всегда имеются заряды, способные легко перемещаться на большие расстояния вне зависимости от того заряжены проводники или нет.* Хорошими проводниками являются металлы, в которых перенос заряда осуществляется наименее слабо связанными с ядром внешними электронами атомов; при этом оставшиеся ионы – атомные основы – прочно связаны с узлами решетки кристалла и не участвуют в переносе заряда. Достаточно хорошими проводниками являются растворы или расплавы электролитов, где носителями являются как электроны, так и ионы.

Напряженность поля внутри проводника в условиях электростатики всегда равна нулю; если бы это было не так, то носители могли бы двигаться под действием поля, перераспределяя заряды. Это продолжалось бы до тех пор, пока напряженность не исчезла, а заряды остановились. В случае заряженного проводника все заряды должны располагаться на его поверхности вследствие взаимного отталкивания. Причем, чем большая кривизна поверхности (острие), тем локальная плотность заряда больше, и наоборот - в местах с отрицательной кривизной (впадины) она меньше. Согласно (1.31) внутри проводника и на его поверхности  $\varphi = \text{const}$ , т.е. поверхность проводника – эквипотенциальная. При внесении проводника во внешнее поле напряженность внутри него по – прежнему отсутствует. Это свойство сохраняется, даже если внутри образца есть полость. Такое свойство используется для защиты чувствительных к слабым полям элементов схем при помощи электростатических экранов. Они представляют собой металлическую сплошную или сетчатую оболочку, в которую и помещаются элементы. Нежелательные внешние поля, возникающие от линий электропередач, работающих электроустановок, природных явлений и т.д., внутрь такого экрана не проникают.

Напряженность поля вблизи плоской поверхности проводника можно найти, используя теорему Гаусса с учетом отсутствия напряженности внутри проводника. Замкнутая поверхность в этом случае представляет собой цилиндр (см. рис. 1.19). Поток, отличный от нуля, имеется только на верхнем торце цилиндра. Поэтому:

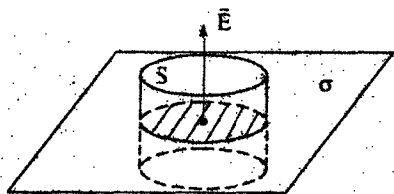


Рис. 1.19

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon \epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \quad (1.66)$$

Она в два раза больше, чем напряженность от заряженной плоскости (1.14).

### 1.12 Емкость. Конденсаторы

*Емкостью (емкостью) уединенного проводника называется отношение его заряда к потенциалу:*

$$C = \frac{q}{\phi} \quad (1.67)$$

Единицей измерения емкости является Кл/В, иначе – фарада [Ф]. Найдем емкость уединенного шара, записав для потенциала выражение (1.22):

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (1.68)$$

Емкость уединенного проводника зависит от его размеров и даже для гигантских тел является величиной малой. Например, согласно формуле (1.68), приняв для Земли  $R = 6370000$  м, получим её емкость  $C \approx 708$  мкФ.

Использование уединенных проводников в качестве накопителя заряда очевидно неудобно. На практике для этой цели применяют конденсаторы.

Конденсатором называется система из двух проводников, разделенных диэлектриком. В этом случае проводники называются обкладками.

Ёмкостью конденсатора называется отношение его заряда к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (1.69)$$

Здесь введено обозначение  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  - напряжение на конденсаторе. Заряд конденсатора равен заряду его положительной пластины. Конденсатор является компактным прибором. Например, его размеры при ёмкости  $\sim 700$  мкФ, приведенной выше, порядка  $2 - 3$  см<sup>3</sup>.

Конденсаторы по своему исполнению и назначению подразделяются по следующим параметрам:

- 1) геометрия пластин (плоские, цилиндрические, сферические и т.д.);
- 2) тип диэлектрика (бумажные, слюдяные, керамические, оксидные, воздушные, жидкостные и т.д.);
- 3) рабочее напряжение (низковольтные и высоковольтные);
- 4) рабочий диапазон частот (низкочастотные, высокочастотные и сверхвысокочастотные);
- 5) полярные и неполярные;
- 6) постоянной и переменной ёмкости;
- 7) величина потерь;
- 8) климатическое исполнение.

Найдем ёмкость плоского конденсатора, используя (1.69) и (1.15):

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\sigma S \epsilon_0 \epsilon}{\sigma d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (1.70)$$

где  $d$  - расстояние между пластинами,  $S$  - их площадь,  $\epsilon$  - относительная проницаемость диэлектрика.

Для цилиндрического конденсатора, представляющего собой два коаксиальных цилиндра радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , длиной  $\ell$ , сначала найдем напряжение, проинтегрировав (1.16) по  $r$ :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (1.71)$$

Используем (1.69) с учетом  $q = \lambda \cdot \ell$ :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot \ell}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.72)$$

Для сферического конденсатора аналогично из (1.20) найдем:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.73)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot \left( \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} \right), \quad (1.74)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  - радиусы внутренней и внешней сфер.

### 1.13 Соединение конденсаторов

С целью увеличения ёмкости или рабочего напряжения очень часто конденсаторы собирают в батареи по несколько штук. Различают два простейших способов соединения: параллельное, когда все обкладки одной полярности соединяют вместе, и последовательное, когда вместе соединяют обкладки разных полярностей соседних конденсаторов. Рассмотрим каждое из них.

Параллельное соединение. Соответствующая схема представлена на рис. 1.20 для трех конденсаторов. Так как каждый из них независимо подключен

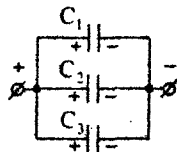


Рис. 1.20



к клеммам, то напряжение на батарее равно напряжению на каждом  $U = U_i$ . Заряд батареи складывается из зарядов вместе соединенных пластин  $q = \sum_i q_i$ . Подставляя сюда (1.69), получим:

$$C = \sum_i C_i. \quad (1.75)$$

При таком соединении рабочее напряжение батареи определяется наименьшим рабочим напряжением из всех конденсаторов, а общая емкость равна сумме емкостей. В частном случае, когда все емкости равны  $C = n \cdot C_0$ .

Последовательное соединение. Соответствующая схема представлена на рис. 1.21 для трех конденсаторов. Поскольку пластины а и б конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  во внешнюю цепь не подключены, то суммарный заряд на них нулевой. Это значит, что пластины имеют одинаковые и разноименные заряды. Поэтому батарея имеет заряд, равный заряду каждого из конденсаторов:  $q = q_i$ . Напряжение на батарее при перемещении от одной клеммы к другой состоит из суммы напряжений проходимых по очереди конденсаторов:  $U = \sum_i U_i$ . Воспользовавшись

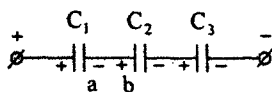


Рис. 1.21

(1.69), получаем:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \quad (1.76)$$

В этом случае рабочее напряжение батареи больше чем каждого конденсатора, но емкость меньше. Для случая двух конденсаторов (1.76) имеет вид

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}, \text{ а для } n \text{ одинаковых - } C = \frac{C_0}{n}.$$

### 1.14 Энергия заряженного конденсатора. Энергия поля

Найдем сначала энергию заряженного уединенного проводника. Разобьем проводник на мелкие фрагменты с зарядом  $\Delta q_i$  и найдем их энергию из (1.37) с учетом  $\varphi = \text{const}$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \Delta q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_i \Delta q_i = \frac{1}{2} \varphi q. \quad (1.77)$$

В случае конденсатора  $q_2 = -q_1 = q$ :

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2) = \frac{1}{2} qU. \quad (1.78)$$

Используя (1.69), формулу (1.78) можно представить в эквивалентных видах:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.79)$$

Подставив во второе равенство (1.79) выражение (1.70) и (1.15) с учетом  $U = Ed$ , получим:

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2 Sd}{2} = \omega V. \quad (1.80)$$

где  $V = Sd$  - объем поля между обкладками конденсатора. Величина  $\omega$  называется объемной плотностью энергии поля:

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot E^2}{2}. \quad (1.81)$$

Используя (1.51), можно для  $\omega$  записать:

$$\omega = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}. \quad (1.82)$$

Кроме того, так как  $D = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$ , то

$$\omega = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{E}}{2}. \quad (1.83)$$

Таким образом, полная плотность энергии поля представляется выражениями (1.81) – (1.83). Из последней формулы видно, что она может быть представлена в виде суммы двух слагаемых – энергии поля в вакууме и энергии поляризации диэлектрика.

### **1.15 Электрический ток. Сила тока. Плотность тока**

До этого раздела физики “Электричество и магнетизм” мы рассматривали вопросы электростатики – раздел физики о неподвижных зарядах. Этот раздел является вводным к изучению вопросов электродинамики.

*Электродинамика – раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов (т.е. электрическим током).*

*Электрический ток – упорядоченное движение заряженных частиц. Способность тел проводить электрический ток называется электрической проводимостью.*

Существуют следующие виды электрической проводимости:

- 1) электронная проводимость – носителями электрических зарядов являются электроны (проводники);
- 2) дырочная проводимость – носителями электрических зарядов являются “дырки” (полупроводники);
- 3) ионная проводимость - носителями электрических зарядов являются ионы (электролиты);
- 4) смешанная проводимость – комбинация первых трех видов проводимости (газы).

Рассмотрим основные характеристики электрического тока:

- 1) основной характеристикой электрического тока является сила тока.

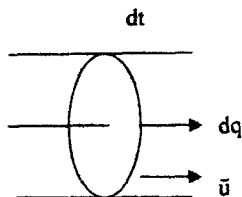


Рис. 1.22

Пусть за промежуток времени  $dt$  переносится через проводник заряд  $dq$ . Где  $\bar{u}$  скорость направленного движения зарядов.

Тогда силой тока называется скалярная величина, численно равная отношению:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1.84)$$

За направление тока условно принимается направление перемещения положительных зарядов.

2) в направленном движении зарядов могут участвовать как положительно заряженные частицы, так и отрицательные.

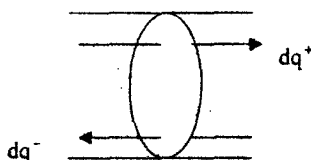


Рис. 1.23

Совместное движение положительных и отрицательных зарядов называется смешанной проводимостью.

Тогда 
$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt} \quad (1.85)$$

3) в разных местах через поперечное сечение проводника может проходить разное количество зарядов. В этом случае вводится дифференциальная характеристика - плотность тока.

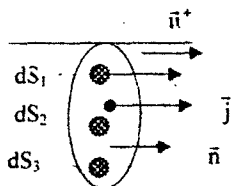


Рис. 1.24

$$\bar{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (1.86)$$

где  $dS_{\perp}$  - площадка, расположенная в данной точке перпендикулярно к направлению движения носителей заряда;  $\bar{j}$  - вектор плотности тока, направлен параллельно направлению движения положительных зарядов ( $\bar{j} \parallel \bar{u}^+$ ).

4) сила тока через поперечное сечение проводника в случае различной плотности  $\vec{j}$  определяется интегрально:

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j}_n dS; \quad \bar{I} = \int_S \vec{j} d\bar{S}. \quad (1.87)$$

Этот интеграл носит наименование – “поток плотности тока через площадку  $S$ ”. Таким образом, сила тока – поток плотности тока через площадку.

5) если за любые равные промежутки времени через поперечное сечение проводника переносятся равные количества зарядов, то такой электрический ток называется постоянным. Для постоянного тока сила тока равна:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (1.88)$$

Единица измерения  $1A = \frac{1Кл}{1с}$ .

### 1.16 Электродвижущая сила. Напряжение. Разность потенциалов

Чтобы постоянный ток длительное время протекал по проводнику, необходимо поддерживать постоянную разность потенциалов, тем самым возвращая электроны в источник тока. Поскольку поддержание постоянной разности потенциала осуществляется не электростатическими силами, значит это должны быть силы незлектрической природы, например, силы обусловленные химическими процессами, механическими, силами магнитного поля и т.д.

Такого рода силы называются сторонними.

Сторонние силы, перемещая заряды, совершают работу.

Если  $A$  – работа сторонних сил по перемещению заряда  $q$ , то отношение

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор}}}{q} \quad (1.89)$$

называется электродвижущей силой. ЭДС – это величина, численно равная работе при перемещении единичного положительного заряда сторонними силами.

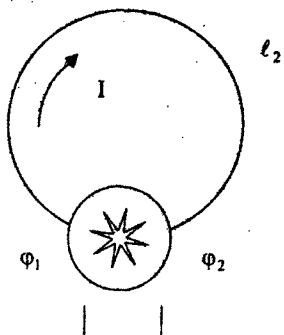


Рис. 1.25

Чтобы существовал в проводнике  $l_2$  ток, необходима разность потенциалов  $\phi_1 - \phi_2$ .

По аналогии с напряженностью электрического поля, поле сторонних сил можно также характеризовать напряженностью  $E_{\text{стор}}$ .

$$\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{q}. \quad (1.90)$$

Отсюда следует:

$$\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{E}_{\text{стор}} \cdot q.$$

На любом участке цепи  $1-2$  работа сторонних сил равна:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}. \quad (1.91)$$

Разделим  $A_{12}$  на  $q$ :

$$\frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}. \quad (1.92)$$

Подставив (1.89) в (1.92), получим:

$$\varepsilon = \oint_c \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}, \quad (1.93)$$

т.е. для замкнутой цепи ЭДС – это циркуляция напряженности поля сторонних сил. Это более строгая формулировка электродвижущей силы.

Таким образом, вводя понятие ЭДС, мы доказали этим уравнением, что действия сторонних сил обуславливает условия  $A \neq 0$  в замкнутом контуре, по которому течет электрический постоянный ток.

Кроме сторонних сил на заряд в проводнике действуют и электростатические силы. Результирующая сила в каждой точке цепи имеет вид

$$\vec{F}_{\text{стор}} + \vec{F}_{\text{эл}} = \vec{F} = q(\vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{эл}}). \quad (1.94)$$

Работа, совершаемая этой силой  $F$  на каком-либо участке цепи 1-2, равна

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\ell = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\ell + q \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл}} d\ell, \quad (1.95)$$

где  $q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\ell = A_{\text{стор}}$  - работа сторонних сил, а  $q \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл}} d\ell = A_{\text{эл}}$  - работа электрических сил.

Разделив (1.95) на  $q$ , получим уравнение напряжения на участке 1-2:

$$\frac{A}{q} = \varepsilon + (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.96)$$

Проанализируем это уравнение.

$$u = \varepsilon + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.97)$$

- напряжением или падением напряжения называется величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного, положительного заряда.

1) при  $\varepsilon = 0$ ,  $u = \varphi_1 - \varphi_2$ . На участке цепи можно не делать различия между напряжением и разностью потенциалов на однородном участке цепи

(например,  $C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{u}$ ).

2) при  $\varepsilon \neq 0$ , но к этому источнику тока ничего не подключено, значит  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , поэтому  $\varepsilon = u$ .

3) при  $u = 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\varepsilon$ .

Таким образом, можно сформулировать условия, необходимые для создания постоянного тока:

1. наличие носителей заряда – т.е. нужен проводник;

2. замкнутая электрическая цепь;

3. сторонние силы должны действовать в замкнутой цепи.

### 1.17 Закон Ома (интегральная и дифференциальная формы) для однородных и неоднородных участков цепи

Закон Ома устанавливает прямую пропорциональность между силой тока на однородном участке цепи и напряжением.

Интегральная форма закона Ома при отсутствии сторонних сил:

$$I = \frac{1}{R} u, \quad (1.98)$$

где  $\frac{1}{R} = \gamma$  - проводимость участка цепи ( $1/\text{Ом} = \text{Сименс}$ ),  $R$  - сопротивление участка цепи (проводника), которое зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств его материала.

Получим дифференциальную форму закона Ома. Запишем уравнение сопротивления для цилиндрического проводника, изготовленного из однородного материала:

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \quad (1.99)$$

где  $\rho$  - удельное электрическое сопротивление ( $\text{Ом}\cdot\text{м}$ ).

Если же он не однороден, то сопротивление можно записать для элементарного цилиндра:

$$r = \rho \frac{d\ell}{dS}. \quad (1.100)$$

Для этого же элемента запишем уравнение разности потенциалов  $du = (\varphi_1 - \varphi_2) = Ed\ell$ , (1.101)

а так как  $dI = j dS$ , то  $dI = \frac{du}{r} \Rightarrow \vec{j} dS = \frac{dS}{\rho dl} Ed\ell \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ ,



Рис. 1.26



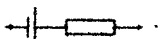
где  $\frac{1}{\rho} = \sigma$  - удельная электрическая проводимость  $\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} =$   
 $= \text{См/м}$  (Сименс/метр).

Тогда

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.102)$$

где  $E$  - напряженность электрического поля в данном месте.

Формула (1.102) - дифференциальная форма закона Ома.

Закон Ома для неоднородного участка цепи 

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют кроме электростатических (кулоновских) сил и сторонние силы.

Поэтому  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$  или в проекциях на элемент контура  $d\ell$ :

$$i = \sigma(E_c + E_{\text{стор}}), \quad (1.103)$$

тогда с учетом того, что  $i = \frac{I}{S}$ , а  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  Ю получим:

$$\frac{I\rho}{S} = E_c + E_{\text{стор}}. \quad (1.104)$$

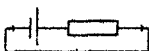
Умножив (1.104) на  $d\ell$  и проинтегрировав вдоль контура, имеем:

$$\int_1^2 \frac{I\rho d\ell}{S} = \int_1^2 E_c d\ell + \int_1^2 E_{\text{стор}} d\ell \Rightarrow I \int_1^2 \frac{\rho d\ell}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12}, \text{ а } \int_1^2 \frac{\rho d\ell}{S} = R_{12},$$

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12},$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12}}{R}. \quad (1.105)$$

Формула (1.105) закон Ома для неоднородного участка цепи.

Если цепь замкнута, , то получим  $\varphi_1 - \varphi_2$  и выражение закона Ома для замкнутой цепи: <sup>17</sup>

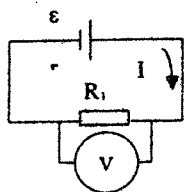


Рис. 1.27

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{12}}, \quad (1.106)$$

где  $R_{12}$  – суммарное сопротивление всей цепи  $R_{12}$ .

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + r},$$

$$IR_1 + Ir = \varepsilon,$$

$$u = \varepsilon - Ir.$$

### 1.18 Правила Кирхгофа. Закон Джоуля-Ленца

Расчет сложных разветвленных цепей постоянного тока по заданным сопротивлениям  $R_i$  участков цепи и приложенным к ним Э.Д.С. сводится к определению силы токов  $I_i$  во всех участках.

Решение таких задач облегчается при использовании 2-х правил Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа выражает условие постоянства тока в цепи и вытекает из того, что в случае установившегося постоянного тока, ни в одной

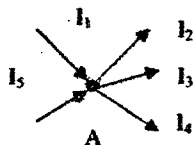


Рис. 1.28

точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды.

Узлом разветвленной цепи называется любая точка, в которой сходится более двух проводников.

Тогда 1-ое правило Кирхгофа формулируется следующим образом: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad (1.107)$$

где  $n$  – число проводников в узле;  $I_i$  – токи в узле.

$$I_1 + I_5 - I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Обычно токи, подходящие к узлу, принимаются положительными, отходящие от него – отрицательными.

2-ое правило Кирхгофа является обобщением закона Ома для разветвленных электрических цепей.

Оно состоит в следующем: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивление  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме Э.Д.С.  $\varepsilon_i$  в контуре.

$$\sum_{i=1}^{n_i} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n_i} \varepsilon_i, \quad (1.108)$$

где  $n_i$  – число отдельных участков, на которые контур разбивается.

Для составления этого уравнения необходимо условиться о направлении обхода контура (по часовой стрелке или против неё).

Выбор этого направления совершенно произволен.

Все токи  $I_i$ , совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными. Э.Д.С.  $\varepsilon_i$  источников тока, включенных на различных участках контура, считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура (см. рис. 1.29).

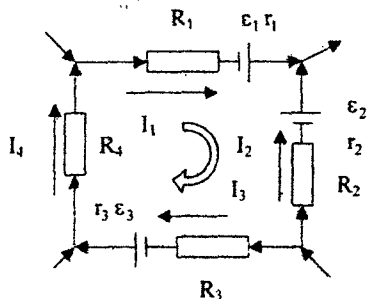
$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 + I_1 r_1 - I_2 r_2 + I_3 r_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

При решении задач рекомендуется следующий порядок расчета сложной цепи постоянного тока:

1) произвольно выбрать и обозначить на чертеже направления токов на всех участках цепи;

2) подсчитать число узлов  $m$  и записать выражения для каждого из  $m - 1$  узла.

3) выделить произвольные замкнутые контуры в цепи  $n$ , условившись о направлении обхода, записать для них  $p - m - 1$  независимых уравнений, где



$\rho$  – количество участков цепи между соседними узлами. При составлении независимых уравнений 2-го правила Кирхгофа следует выбирать контуры таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок, не входящий в узел рассмотрения контура.

Закон Джоуля-Ленца.

Если есть участок цепи, по которому течет постоянный ток  $I_1$ , сопротивление его  $R$ , а сам проводник неподвижен и в нем не происходит химических изменений, то количество выделяющегося тепла можно определить из зависимости:

$$Q = I \cdot u \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t. \quad (1.109)$$

Формула (1.109) - интегральная форма. Этот экспериментальный закон был независимо друг от друга установлен Джоулем и Ленцем.

Для более детального исследования, а конкретно для случая, когда ток меняется со временем, количество выделившегося тепла можно определить:

$$Q = R \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) dt. \quad (1.110)$$

Выделим элементарный объем проводника с основанием  $dS$  и длиной  $d\ell$ ; тогда с учетом  $r = \rho \frac{d\ell}{dS}$  и  $d\ell = j dS$  получим элементарное количество тепла,

выделенное элементарным объемом проводника:

$$dQ = j^2 dS^2 \rho \frac{d\ell}{dS} dt = j^2 \rho \cdot dV dt. \quad (1.111)$$

Разделим правую и левую части на  $dV dt$ :

$$\frac{dQ}{dV \cdot dt} = j^2 \rho, \quad (1.112)$$

где  $\frac{dQ}{dV \cdot dt} = Q_{ya}$  - удельная тепловая мощность на единицу объема.

Тогда запишем закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$Q_{ya} = \rho j^2. \quad (1.113)$$

С учетом  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  и  $j = \sigma E$  получим связь удельной мощности с характеристиками поля для однородных участков цепи:

$$Q_{ya} = \sigma E^2. \quad (1.114)$$

Эту запись закона Джоуля-Ленца можно применять и для неоднородных участков цепи, когда сторонние силы не имеют химический характер, а только механический, фотоэлектрический и т.д.

## 2. Магнетизм

### 2.1 Магнитное поле. Сила Ампера

Всякий электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Это поле осуществляет силовое взаимодействие между двумя проводниками с током, между двумя постоянными магнитами и между проводником с током и магнитами. Подобно электрическому полю магнитное поле является материальным объектом и передает взаимодействие с конечной скоростью. Постоянным магнитом приписывают два полюса - северный и южный. Одноименные полюса отталкиваются, а разноименные - притягиваются.

Подобно напряженности электрического поля для магнитного поля вводится его силовая характеристика - магнитная индукция  $\vec{B}$ . Соответственно.

магнитное поле может изображаться силовыми линиями, которые, однако, называются линиями индукции, имеющими направление. Линии индукции выходят из северного полюса магнита (N) и входят в южный (S). Но, в отличие от электрических силовых линий, линии магнитной индукции не заканчиваются на полюсах, а представляют собой замкнутые линии.

Одним из первых, кто экспериментально изучал свойства магнитного поля был французский исследователь А. Ампер. Схема опытов Ампера показана на рисунке 2.1. Подвижный проводник MN, испытывая силовое воздействие со стороны поля, двигается по токопроводящим планкам. После обработки экспериментальных данных была получена формула для силы, действующей на проводник, длиной  $d\ell$  с током  $I$ .

$$d\vec{F} = I[\alpha \vec{\ell} \vec{B}], \quad (2.1)$$

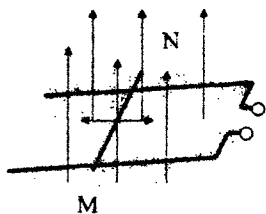


Рис. 2.1

где  $d\vec{\ell}$  - вектор, направленный в сторону протекания тока.

Следует отметить, что силы магнитного взаимодействия не являются центральными. Они всегда направлены перпендикулярно линиям магнитной индукции и проводникам с токами и существенно зависят от их ориентации. Направление

векторов можно найти по правилу левой руки.

## 2.2 Закон Био – Савара - Лапласа

Экспериментальным путем французские исследователи Ж. Био и Ф. Савар, при участии Лапласа, который теоретически обработал их данные, получили следующее выражение для индукции  $d\vec{B}$ , созданной элементом про-

водника  $d\vec{l}$  в точке, удаленной на вектор  $\vec{r}$  от элемента, по которому течет ток  $I$ .

$$\alpha\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [\alpha\vec{l}\vec{r}], \quad (2.2)$$

Где  $\mu_0$  - магнитная постоянная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость среды, которая показывает, во сколько раз индукция в данной среде больше чем в вакууме.

Кроме индукции  $\vec{B}$  магнитное поле можно характеризовать напряженностью  $\vec{H}$ .

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}. \quad (2.3)$$

Используя выражение (2.2) для  $\vec{H}$ , получаем формулу:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{l}\vec{r}]. \quad (2.4)$$

Из (2.2) и (2.4) видно, что подобно электрическому полю магнитное поле убывает  $\sim \frac{1}{r^2}$ .

Магнитная индукция  $\vec{B}$  подобна напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , т.к. обе они зависят от характеристик среды ( $\mu$  и  $\epsilon$ ). С другой стороны, напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  подобна электрической индукции  $\vec{D}$ , т.к. обе они не зависят от свойств среды.

Для магнитного поля также справедлив принцип суперпозиции: поле, порождаемое несколькими токами, равно векторной сумме полей каждого тока в отдельности.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (2.5)$$

В соответствии с этим принципом для того, чтобы рассчитать индукцию, создаваемую током произвольной конфигурации, необходимо такой провод-

ник разбить на малые фрагменты, подсчитать поля, созданные каждым из них, а затем векторно их сложить. В пределе бесконечно малых фрагментов мы приходим к интегралу.

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}, \quad (2.6)$$

где интегрирование идет по линии тока.

### 2.3 Магнитное поле прямолинейного проводника с током

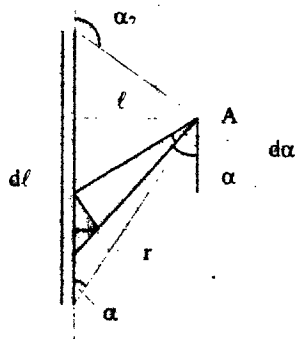


Рис. 2.2

Рассмотрим мысленно выделенный участок цепи, по которой течет ток  $I$ , который является прямолинейным отрезком. Векторы  $d\vec{\ell}$  и  $\vec{r}$  лежат в одной плоскости. Поэтому направление всех векторов  $d\vec{B}$  в исследуемой точке  $A$  одинаково. В этом случае от векторного уравнения закона Био – Савара – Лапласа (2.2) можно перейти к скалярному.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\ell \sin\alpha}{r^2}. \quad (2.7)$$

Из рисунка 2.2 видно, что  $r = \frac{l}{\sin\alpha}$ ;

$$d\ell = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{l d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Подставляя эти выражения в (2.7) и интегрируя по  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$ , до  $\alpha_2$  – (углы между предельными положениями  $\vec{r}$  и отрезком проводника), получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin\alpha d\alpha}{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (2.8)$$



### 2.3 Магнитное поле кругового тока

Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого круговым витком с током в произвольной точке А оси витка. Пусть R - радиус витка, l - расстояние от А до центра витка О. Вектора  $dB_1$ , созданные элементами  $dl_1$ , образуют коническую поверхность.

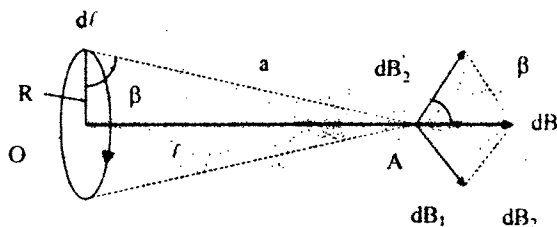


Рис. 2.3

Чтобы найти результирующую индукцию, необходимо взять их составляющие вдоль оси:

$$dB_1 = dB \cos \beta = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{a^2} \cos \beta = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} I \frac{R}{(R^2 + l^2)^{3/2}} dl \quad (2.9)$$

Так как  $\cos \beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}$ ;  $a^2 = (R^2 + l^2)$ .

После интегрирования (2.9) по dl получаем

$$B = \int_0^{2\pi k} \frac{\mu \mu_0}{4\pi} I \frac{R}{(R^2 + l^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + l^2)^{3/2}} \quad (2.10)$$

Магнитным моментом контура с током называется вектор

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} \quad (2.11)$$

где I - ток, текущий в контуре, S - его площадь; вектор n направлен перпендикулярно плоскости витка и связан с направлением тока правилом правого винта, т.е. вдоль направления B.

В этом случае выражению (10) можно придать иную форму:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + l^2)^{3/2}}; \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + l^2)^{3/2}}. \quad (2.12)$$

Если А лежит далеко от контура, то  $l \gg R$  и, пренебрегая  $R^2$  в (2.12), получим для  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{l^3}. \quad (2.13)$$

Это выражение аналогично выражению для поля электрического диполя. Поэтому контур с током называют магнитным диполем.

## 2.4 Магнитное поле соленоида

Соленоидом называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа намотанных друг к другу проводника в один слой, по которому идет ток.

Реальный соленоид имеет составляющую тока вдоль оси. Идеальный со-

леноид предполагается состоящим из круговых замкнутых токов с общей осью, у которого отсутствует осевая составляющая тока.

Пусть на единицу длины соленоида

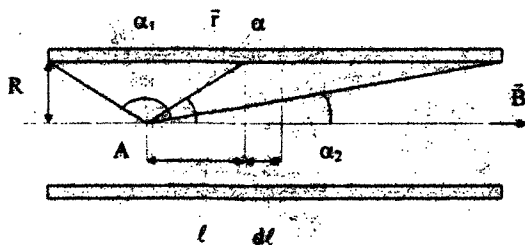


Рис. 2.4

приходится  $n$  витков. Индукция, создаваемая слоем  $dl$  в точке А равна:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi n R^2}{(R^2 + l^2)^{3/2}} n dl. \quad (2.14)$$

Кроме того  $R^2 + \ell^2 = \frac{R}{\sin \alpha}$ ;  $\ell = R \operatorname{ctg} \alpha$ ;  $d\ell = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ .

Подставив их в (2.14), получаем  $dB = \frac{\mu\mu_0}{2} \ln \sin \alpha \cdot d\alpha$ .

После интегрирования по  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$  получаем

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu\mu_0}{2} nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (2.15)$$

Индукция бесконечно длинного соленоида на его оси:

$$B = \mu\mu_0 nI; \quad H = nI. \quad (2.16)$$

## 2.5 Сила электрического тока

Если в выражении (2.8) взять значения углов  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ , то получим магнитную индукцию для бесконечно длинного прямолинейного проводника с током:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{\ell}. \quad (2.17)$$

Подставляя это выражение в (2.1), получим выражение для силы, действующей на участок длины  $\ell$  проводника с током со стороны параллельного проводника, удаленного на расстояние  $\ell$  от него.

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{\ell} \ell. \quad (2.18)$$

Это выражение используется в системе СИ для определения единицы силы тока.

*Силой тока 1А называется ток, текущий по параллельным проводникам, удаленным друг от друга на расстоянии один метр, при котором сила, действующая на каждый метр проводника, равна  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.*

## 2.6 Поле движущегося заряда

Используя закон Био – Савара – Лапласа, можно получить выражение для поля, создаваемого движущимся одиночным зарядом:

$$Id\vec{l} = \vec{J}Sd\vec{l} = e\vec{v} \cdot Sd\vec{l} = e\vec{v}N,$$

где  $n$  - плотность зарядов,  $N$  - полное их число в объеме проводника  $Sd\vec{l}$ . Тогда

$$\text{где } d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{e[\vec{v}\vec{r}]}{r^3} N.$$

Тогда поле одного заряда

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{e[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}. \quad (2.19)$$

Здесь  $\vec{v}$  - скорость направленного движения заряда во внешнем поле. Формула (2.19) остается справедливой и в случае, когда  $\vec{v}$  - истинная скорость заряда.

Направление  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  связаны правилом правого винта.

## 2.7 Дивергенция и ротор магнитного поля

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии магнитной индукции замкнуты. Поэтому при любом выборе замкнутой поверхности полный поток  $\vec{B}$  через нее равен нулю. Таким образом

$$\oint \vec{B} d\vec{S}. \quad (2.20)$$

Применяя теорему Гаусса - Остроградского, получаем

$$\text{div}\vec{B} = 0. \quad (2.21)$$

Теперь обратимся к циркуляции вектора  $\vec{B}$ . Для этого выберем произвольный контур, охватывающий бесконечный прямолинейный проводник с током в вакууме. Как видно из рисунка,

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \oint_L B d\ell \cos(\vec{B} d\vec{\ell}) = \oint_L B d\ell_1 = \oint_L B r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

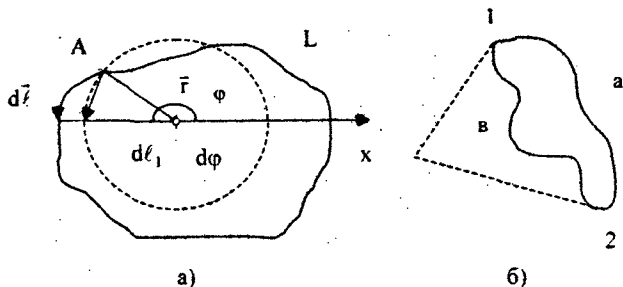


Рис. 2.5

То есть

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I. \quad (2.22)$$

Здесь под  $I$  нужно понимать суммарный ток, текущий через площадку, ограниченную контуром. Если внутри контура нет, то циркуляция  $\vec{B}$  равна нулю (см. рис. 2.5 б), т.к. интеграл по линии 1a2 равен интегралу по линии 1b2. Применяя к формуле (2.22) теорему Стокса, получаем

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.23)$$

Поле, у которого ротор отличен от нуля, называется соленоидальным или вихревым.

### 2.8 Поле тороида и соленоида

Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму тора. Выберем контур в виде окружности, центр которой совпадает с центром тороида и радиуса  $r$ . В случаях  $r < R_1$  и  $r > R_2$  циркуляция  $\vec{B}$  равна нулю, т.к. суммарный ток в обоих случаях равен нулю.

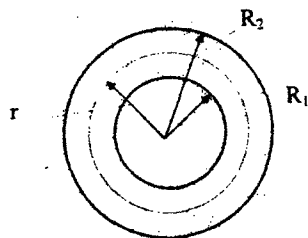


Рис. 2.6

Пусть  $R_1 < r < R_2$ , тогда контур охватывает все  $N$  витков тора, направление тока в которых одного знака. Тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I = \mu_0 \cdot 2\pi R n I, \text{ или}$$

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}, \quad (2.24)$$

где  $n$  - количество витков, приходящихся на единицу длины оси тороида  $R_1 < R < R_2$ ;

$$R = (R_1 + R_2)/2.$$

Аналогичным образом можно получить индукцию бесконечно длинного соленоида, выбирая замкнутый контур согласно рис. 2.7.

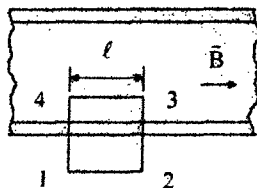


Рис. 2.7

Смещение участка 3-4 внутри соленоида не приводит к изменению циркуляции  $\vec{B}$ , значит поле

внутри такого соленоида однородно. Если бы контур лежал целиком вне соленоида, то циркуляция также была бы равна нулю. Это значит, что вне соленоида  $\vec{B} = 0$ . Применяя к изображенному контуру выражение (2.22), получаем  $\oint \vec{B} d\vec{\ell} = B \cdot \ell = \mu_0 I n \ell$  или  $B = \mu_0 I n$ . (2.25)

Индукция вне соленоида равна нулю. В этом можно убедиться, выбирая контур вне соленоида.

## 2.9 Контур с током в магнитном поле

Рассмотрим плоский контур, помещенный в однородное магнитное поле. Суммарная сила, действующая на него, в соответствии с законом Ампера (2.1) определится выражением

$$\vec{F} = \oint_L [d\vec{\ell} \vec{B}] = I \left[ \oint_L d\vec{\ell}, \vec{B} \right] = 0, \quad (2.26)$$

где  $I$  - ток в контуре,  $d\vec{\ell}$  - элемент длины контура. Т.о., суммарная сила, действующая на контур в однородном магнитном поле, равна нулю. Это, однако, не относится к моменту сил, действующих на контур. В случае, когда суммарная сила, действующая на тело равна нулю, суммарный вращающий момент не зависит от положения оси, относительно которой он создается (см. "Механику").

Пусть угол между магнитным моментом контура и индукцией равен  $\alpha$ . Разложим  $\vec{B}$  на две составляющие - параллельную  $\vec{p}_m(\vec{B})$  и перпендикулярную  $\vec{p}_m(\vec{B}_\perp)$ . Силы, действующие на элементы контура со стороны составляющей  $\vec{B}_\perp$ , лежат в плоскости контура, а, значит, они не создают момента, т.к. ввиду произвольности выбора оси последнюю можно выбрать в плоскости контура. А силы, проходящие через ось, момента не создают.

Рассчитаем величину момента, создаваемого составляющей  $\vec{B}_\perp$ . Выделим в плоскости контура слой  $dy$  (см. рис. 2.8). Силы, действующие на элементы  $d\vec{\ell}_1$  и  $d\vec{\ell}_2$  равны:  $F_1 = IB_\perp \sin\alpha_1 d\ell_1 = IB_\perp dy$ ;  $F_2 = IB_\perp \sin\alpha_2 d\ell_2 = IB_\perp dy$ .

Тогда соответствующий момент  $dM = F_1 x = F_2 x = IB_\perp x dy = IB_\perp dS$ , где  $dS$  - элемент площади контура. После интегрирования по всем элементам

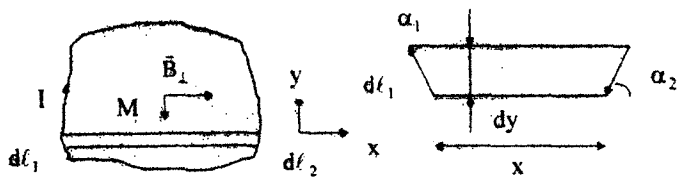


Рис. 2.8

контура, получаем  $M = ISB_{\perp}$ .

С учетом того, что  $B_{\perp} = B \sin(\vec{n} \vec{B})$ , где  $\vec{n}$  - нормаль к контуру, получим

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]. \quad (2.27)$$

При повороте контура в магнитном поле внешняя сила совершает работу, которая идет на увеличение потенциальной энергии контура. Для элементарного поворота  $d\alpha$  имеем:  $dW = dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha$ , где  $\alpha$  - угол между  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ . После интегрирования по  $\alpha$  получаем

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const}; \quad W = -(\vec{p}_m \vec{B}). \quad (2.28)$$

Здесь мы константу положили равной нулю.

В случае неоднородного магнитного поля на контур с током действует сила, стягивающая или выталкивающая его из поля. Считаем в (2.28)  $\alpha = \text{const}$  и, продифференцировав по пространственным координатам, получим силу:

$$\vec{F} = \vec{p}_m \text{grad} \vec{B}. \quad (2.29)$$

В зависимости от  $\beta$  контур стягивается  $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$  в поле или выталкивается из него  $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$ , где  $\beta$  - вектор.

## 2.10 Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле

При перемещении проводника с током длины  $d\ell$  в магнитном поле совершается работа  $dA = d\vec{F} d\vec{h}$ , где  $d\vec{F}$  - сила Ампера, действующая на проводник с током  $d\vec{F} = I [d\vec{\ell} \vec{B}]$ ,  $d\vec{h}$  - вектор элементарного перемещения элемента. В последней формуле осуществим цилиндрическую перестановку:

$$dA = I [d\vec{\ell} \vec{B}] d\vec{h} = I \vec{B} [d\vec{h} d\vec{\ell}] = I \vec{B} d\vec{S} = I d\Phi, \quad (2.30)$$



где  $d\vec{S}$  - элемент площади, заметаемый элементом проводника  $d\vec{l}$  при его движении.  $d\Phi$  - изменение магнитного потока через контур при его деформации. Для работы получим выражение:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (2.31)$$

## 2.11 Сила Лоренца

В магнитном поле сила действует не только на проводник с током, но и на каждый из двух движущихся зарядов. Запишем выражение для силы Ампера (2.1) и учтем, что  $d\vec{l} = \vec{J} \cdot \vec{S} d\vec{l} = qn\vec{v} \cdot \vec{S} d\vec{l} = q\vec{v}N$ , где  $n$  - плотность носителей в проводнике,  $q$  - их заряд,  $N$  - полное число носителей в проводнике длины  $d\vec{l}$ . Тогда

$$\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}] \quad \frac{\vec{F}}{N} = \vec{F}_n = q[\vec{v}\vec{B}], \quad (2.32)$$

где  $\vec{F}_n$  - сила, действующая в магнитном поле на один заряд. Эту силу называют Силой Лоренца. Ее направление можно также найти по правилу левой руки.

Пусть заряд движется в магнитном поле под углом  $\alpha$  к вектору  $\vec{B}$ . Разложим  $\vec{v}$  на две составляющие -  $\vec{v}_\parallel$  и  $\vec{v}_\perp$ , параллельную и перпендикулярную к  $\vec{B}$ . Т.к.  $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{B}$ , то сила Лоренца на частицу движущуюся со скоростью  $\parallel \vec{B}$  не действует. Напротив, на частицу, движущуюся со скоростью  $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$ , сила Лоренца действует и является центростремительной. В этом случае траектория частицы является окружностью. Приравняем силу Лоренца к центростремительной силе:

$$\frac{m\vec{v}}{r} = |q|\vec{v}\vec{B}; \quad r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v}{B}, \quad (2.33)$$

где  $r$  - радиус окружности. В общем случае при наличии обеих компонент скорости частица движется по винтовой линии радиуса (33) с шагом

$$h = v \cdot T, \quad (2.34)$$

где  $T$  - период обращения по окружности. Для его нахождения разделим длину окружности на скорость:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right|. \quad (2.35)$$

Этому периоду соответствует частота, называемая циклической:

$$\omega = \left| \frac{qB}{m} \right|. \quad (2.36)$$

Окончательно

$$r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v \sin \alpha}{B}; \quad h = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right| v \cos \alpha, \quad (2.37)$$

где  $\alpha$  - угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

## 2.12 Электромагнитная индукция

При изменении индукции внешнего поля, пронизывающего плоский контур, в последнем возникает электрический ток. Впервые это явление экспериментально исследовал Фарадей. Возникновение тока в контуре связано с действием сторонних сил, т.е. ЭДС, и носит название явление электромагнитной индукции. Фарадей установил, что величина ЭДС пропорциональна скорости изменения потока магнитной индукции через площадь контура. Направление ЭДС считается положительным, если магнитный момент индукционного тока образует острый угол с направлением внешней индукции  $\vec{B}$ . Знак ЭДС можно определить из правила Ленца.

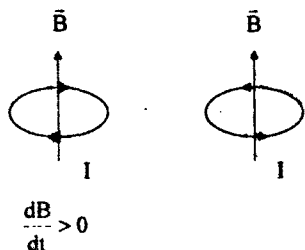


Рис. 2.9

При всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур, в нем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, его вызвавшего.

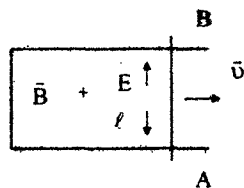
Направление тока при изменении  $\vec{B}$  показано на рисунке. Игрет роль не только на-

правление  $\vec{B}$ , но и знак ее производной по времени.

На основании вышеизложенного можно записать основной закон электромагнитной индукции в виде:

$$\epsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.38)$$

Покажем на примере проявление этого закона. Пусть в магнитном поле находится такой контур, что одна из его сторон может скользить по направляющим (см. рис. 2.10).



Если участок АВ движется под действием внешней силы со скоростью  $\vec{v}$ , то на электроны проводника действует сила Лоренца  $\vec{F}_L = -e[\vec{v}\vec{B}] = -e\vec{E}$ , что эквивалентно наличию напряженности поля сторонних сил. Найдем ЭДС этого поля:

$$\epsilon_i = \int \vec{E} d\vec{l} = \int [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l} = [\vec{v}\vec{B}] \int_A^B d\vec{l} = [\vec{v}\vec{B}] l \quad (2.39)$$

Интеграл по контуру свелся к интегралу по участку АВ, т.к. движется только он. Запишем (39) в ином виде, осуществив циклическую перестановку сомножителей:

$$\varepsilon_i = \bar{B}[\dot{\ell v}] = \frac{B[\ell v dt]}{dt} = -\frac{\bar{B}d\bar{S}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.40)$$

где  $d\bar{S}$  - элемент площади, направленный вдоль нормали по контуру. Изменение  $\Phi$  в (2.40) осуществляется за счет изменения геометрии контура. Другой путь - изменение  $\bar{B}$  без изменения площади. Во всех случаях справедливо выражение (2.38). Если контур содержит  $N$  витков, то (2.38) удобнее записать в виде:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (2.41)$$

где  $\Psi = N \cdot \Phi$  - потокосцепление.

### 2.13 Контур в магнитном поле

Поместим в магнитное поле с индукцией  $B$  контур. Приведем его во вращение вокруг оси, лежащей в плоскости контура перпендикулярно линиям индукции. Пусть  $\alpha$  - угол между  $\bar{n}$  и  $\bar{B}$ , при вращении с постоянной угловой

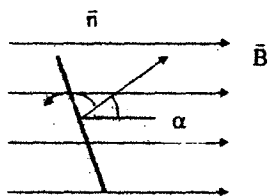


Рис. 2.11

скоростью  $\alpha = \omega t$ . Тогда  $\Phi = B \cdot S \cdot \cos \omega t$ , где  $S$  - площадь, ограниченная контуром. Подставляя это выражение в (2.38), получим

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t. \quad (2.42)$$

Т.е. ЭДС индукции меняется по закону синуса от времени. Максимальное значение ЭДС:  $\varepsilon_{\max} = BS\omega$ .

### 2.14 Вихревые токи

Индукционные токи могут возникать не только в контурах, но и в массивных проводниках, находящихся во внешнем переменном магнитном поле.

Они носят вихревой характер. Сопротивление таких проводников  $R$  может быть очень малым, поэтому величина этих токов может достигать больших значений, что приводит к разогреву проводника. Вихревые токи называются токами Фуко. Если внешне поле меняется по гармоническому закону, то величина тока пропорциональна частоте  $\omega$ , т.к.

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

Тепло, выделяющееся в проводнике, пропорционально  $I_i^2$ , а значит и квадрату частоты. Поэтому, например, для плавления металлов в индукционных печах, принцип действия которых основан на использовании токов Фуко, применяется высокая частота изменения  $B$ . Во всех известных печах СВЧ частота составляет сотни мегагерц. При этом пища, имеющая в своем составе влагу и проводящая ток, разогревается до температур ее кулинарной обработки.

Вредное действие токов Фуко связано с ненужным расходом энергии на нагрев. Например, сердечники трансформаторов выполняются наборными из тонких пластин, покрытых лаком или оксидом, чтобы повысить сопротивление токам Фуко. Для высокочастотных полей используются специальные магнитные материалы ферриты, имеющие высокое удельное сопротивление, которые изготавливаются путем химических соединений окиси железа ( $Fe_2O_3$ ) с окислами других металлов.

Одно из полезных применений токов Фуко – измерительные приборы. К стрелке прибора прикрепляется пластина из металла, помещенная в магнитное поле. Т.к. токи Фуко препятствуют внешнему магнитному полю, то это приводит к торможению стрелки, т.е. быстрому ее успокоению при измерениях.

## 2.15 Явление самоиндукции

Если по контуру течет ток, то он создает поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром. Этот поток пропорционален магнитной индукции, а последняя, в силу закона Био – Савара – Лапласа; пропорциональна току в контуре. Таким образом

$$\Phi = LI \quad \text{или} \quad \Psi = LI. \quad (2.43)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется индуктивностью. Единицей измерения индуктивности в системе СИ является Генри (1Гн) - это индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого равен 1Вб при силе тока 1А.

Найдем индуктивность очень длинного соленоида. Индукция в нем, согласно (2.16), равна  $B = \mu\mu_0 nI$ . Магнитный поток через один виток  $\Phi = BS$ , а потокоцепление через  $N = n\ell$  витков  $\Psi = \mu\mu_0 n^2 \ell SI$ , тогда из (2.43) находим индуктивность

$$L = \mu\mu_0 n^2 \ell S = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (2.44)$$

Эта формула справедлива, очевидно, для очень длинного соленоида. В ней:  $n$  - число витков на единицу длины,  $\ell$  - длина соленоида,  $V$  - его объем.

*Явление самоиндукции - возникновение электродвижущей силы индукции в результате изменения тока в контуре.* Подобно выражению (2.38) величина ЭДС самоиндукции равна:

$$\varepsilon_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt}. \quad (2.45)$$

Взяв производную, получим

$$\varepsilon_s = -I \frac{dL}{dt} - L \frac{dI}{dt}. \quad (2.46)$$

Если геометрические размеры контура не меняются, то  $\frac{dL}{dt} = 0$ , и в (2.46)

остается только второе слагаемое

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2.47)$$

## 2.16 Взаимная индукция

Пусть в пространстве на некотором расстоянии друг от друга находятся два контура. Если по первому из них течет ток  $I_1$ , то магнитный поток его через второй контур пропорционален этому потоку, а при его изменении во втором контуре индуцируется ЭДС:

$$\Psi_2 = L_{21} I_1; \quad \varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (2.48)$$

Аналогичная ситуация возникает, когда ток течет во втором контуре:

$$\Psi_1 = L_{12} I_2; \quad \varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (2.49)$$

Контур 1 и 2 называются связанными, а возникновение ЭДС в одном из них, когда ток меняется, вызывает в другом взаимную ЭДС. Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются коэффициентами взаимной индукции. Измеряются как и индуктивность в генри. В отсутствие ферромагнетиков  $L_{12} = L_{21}$ .

Коэффициент взаимной индукции двух катушек намотанных на одном торе

$$L_{12} = \frac{S}{\ell} \mu_0 N_1 N_2, \quad (2.50)$$

где  $\ell$  - длина средней линии тора,  $S$  - площадь его поперечного сечения,  $N_1$  и  $N_2$  - количества витков катушек.

### 1.17 Энергия магнитного поля

Пусть в замкнутом контуре, содержащем индуктивность, течет ток, поддерживаемый некоторым источником. Пусть в некоторый момент источник прекращает работу, не разрывая, однако, цепи. Ток в цепи прекращается не сразу, а при наличии ЭДС самоиндукции убывает с течением времени. При этом в проводниках контура выделяется тепло, т.е., совершается работа. Поскольку иных источников нет, то эта работа совершается за счет убыли энергии магнитного поля, сосредоточенного в индуктивности:

$$dW = dA = \varepsilon_s Idt = -L \frac{dl}{dt} \cdot Idt = -Ll|dl|. \quad (2.51)$$

После интегрирования (2.51) по току от начального значения  $I$  до конечного  $0$ , получим полную энергию, первоначально занесенную в магнитное поле.

$$W = -\int_1^0 Ll|dl| = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.52)$$

Подставим в (2.52) индуктивность очень длинного соленоида (2.44). Тогда

$W = \frac{\mu\mu_0 n^2 V I^2}{2}$ , но, согласно (2.16),  $nI = H$ , а  $\mu\mu_0 H = B$ , следовательно,

$$W = \frac{\mu\mu_0 H^2 V}{2}. \quad (2.53)$$

Если ввести объемную плотность энергии  $\omega = \frac{W}{V}$ , то она определяется выражением:

$$\omega = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (2.54)$$

По форме эта плотность энергии сходна с подобной для электрического поля, если заменить  $B$  на  $E$  и  $H$  на  $D$ .



## 2.18 Магнитное поле в магнетиках

Магнетиком называется вещество, рассматриваемое с точки зрения его магнитных свойств. Магнитное поле в магнетике, отличается от такового в вакууме. Если  $\vec{B}_0$  - индукция поля, созданного внешними токами, которые еще называют макротоками или токами проводимости; а  $\vec{B}'$  - индукция, создаваемая магнетиком, т.е. его внутримолекулярными токами, то полная индукция в магнетике

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (2.55)$$

Естественно, что под  $\vec{B}$  поднимается усредненное, макроскопическое поле. Индукция  $\vec{B}'$  создается движением электронов в молекулах магнетика. За счет этих токов проводимость осуществляться не может, т.к. эти электроны связаны с ядрами и не покидают пределов молекул. В отсутствие внешнего поля большинство магнетиков не создают поле  $\vec{B}'$ . Оно возникает лишь при включении внешнего поля. Механизмы его образования будут рассмотрены позже.

Состояние магнетика характеризуется его намагниченностью - суммарным магнитным моментом всех молекул в единице объема:

$$\vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_{mi} \quad (2.56)$$

Запишем выражение для ротора индукции  $\text{rot} \vec{B} = \text{rot} \vec{B}_0 + \text{rot} \vec{B}'$ . Поскольку  $\text{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}$  (см.(2.23)), то и  $\text{rot} \vec{B}'$  должен определяться плотностью некоторых токов. Эти токи и являются молекулярными, т.е.  $\text{rot} \vec{B}' = \vec{j}_m$ .

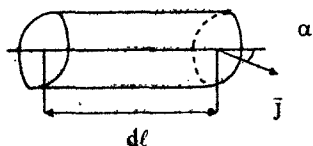


Рис. 2.12

Выберем внутри магнетика произвольный контур L. Найдем полный молекулярный ток, охватываемый этим контуром.

Выберем внутри магнетика произвольный контур L. Найдем полный молекулярный ток, охватываемый этим контуром.

Для этого рассмотрим элемент контура  $d\ell$ , ось которого составляет с  $\vec{J}$  угол  $\alpha$ . Отличный от нуля ток будут создавать молекулярные токи, направленные на контур  $L$ . Все другие либо вообще не связаны с поверхностью, натянутой на контур, либо пересекают ее дважды, что в результате дает нуль.

Из рисунка видно, что вклад от  $d\ell$  в суммарный ток равен:

$$dI = I_m n \cdot S_m \ell \cos \alpha, \quad (2.57)$$

где  $n$  - количество молекул в единице объема,  $I_m$  - отдельный молекулярный ток,  $S_m$  - его площадь. Учитывая, что

$$I_m \cdot S_m = p_{m\ell}, \quad \text{а} \quad n \cdot \vec{p}_{m\ell} = \vec{J},$$

получим из (2.57): полный ток, охватываемый контуром, равен:

$$I = \int_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{J} d\ell,$$

где  $S$  - поверхность, натянутая на контур.

Используя теорему Стокса, получим:

$$\int_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{J} \cdot d\vec{S}; \quad \text{rot} \vec{J} = \vec{j}_m. \quad (2.58)$$

Тогда 
$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot} \vec{J}$$

или 
$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}. \quad (2.59)$$

Сравнивая это выражение с (2.3), приходим к результату

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}. \quad (2.60)$$

Вектор намагниченности  $\vec{J}$  линейно связан с  $\vec{H}$  при не слишком сильной намагниченности магнетика: 
$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (2.61)$$

Множитель  $\chi$  называется магнитной восприимчивостью. В изотропных магнетиках это - скаляр, а в анизотропных - тензор II ранга. Подставляя (2.61) в (2.60) и выражая  $\vec{B}$ , получим

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}, \quad (2.62)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  - относительная магнитная проницаемость среды.

## 2.19 Диамагнетизм

В зависимости от структуры и свойств атомов или молекул магнетиков, а также величины магнитной проницаемости, все они делятся на три основных типа: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

*Диамагнетики представляют собой вещества, атомы которых в отсутствие поля не обладают собственным магнитным моментом. Это означает, что суммарный магнитный момент каждого электрона, движущегося вокруг ядра, равен нулю.*

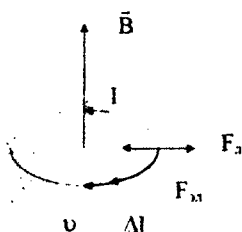


Рис. 2.13

Рассмотрим движение одного такого электрона (см. рис. 2.13). Будем считать, что он движется по круговой орбите в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  внешнего поля. Уравнения второго закона Ньютона для случаев, когда внешнее поле включено и выключено, имеют вид:

$$m\omega_1^2 r = F_{цл}, \quad (2.63)$$

$$m\omega_2^2 r = F_{цл} + e\omega r B. \quad (2.64)$$

В (2.64) второе слагаемое справа - сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле. Вычитая из (2.64) выражение (2.63) в предположении, что  $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega$  для не слишком больших значений  $B$ , получаем

$$\Delta\omega = -\frac{eB}{2m}. \quad (2.65)$$

Этот результат является частным случаем теоремы Лармора, которая гласит, что электроны, движущиеся по своим орбитам и имеющие орбитальный

магнитный момент  $\vec{p}_m$  во внешнем магнитном поле, совершают процессию (вращение вектора  $\vec{p}_m$  вокруг направления  $\vec{B}$ ) с угловой частотой, определяемой (2.65).

Изменение частоты вращения эквивалентно появлению дополнительного микротока  $\Delta I$  по орбите, а вместе с ним магнитного момента:

$$\Delta I = e \frac{\Delta\omega}{2\pi} = -\frac{e^2 B}{4\pi m}, \quad (2.66)$$

$$\Delta p_m = \Delta I S_{\perp}, \quad (2.67)$$

где  $S_{\perp}$  - проекция площади орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную  $\vec{B}$ . В случае, более общем, чем изображено на рис. 2.13. умножим (2.67) на количество электронов в атоме  $Z$  и на концентрацию атомов  $n$ , получаем значение для намагниченности в векторном виде:

$$\vec{j} = -\frac{e^2 n Z S_{\perp}}{4\pi m} \vec{B}. \quad (2.68)$$

Обозначив в (2.68) коэффициент при  $\vec{B}$  через  $\alpha$ , с учетом формулы (2.61) получим:

$$\chi = -\mu_0 \frac{\alpha}{1 + \mu_0 \alpha} \cong -\mu_0 \alpha, \quad (2.69)$$

поскольку считаем  $\mu_0 \alpha \ll 1$ . Оценка  $\alpha$  из (2.68) дает величину  $\approx 10^{-5} - 10^{-6}$ .

Окончательно выражение для магнитной восприимчивости  $\chi$  имеет вид:

$$\chi = -\frac{e^2 n Z S_{\perp}}{4\pi m}. \quad (2.70)$$

Таким образом, в диамагнетиках намагниченность направлена в противоположную сторону по отношению к  $\vec{B}$ , что говорит о том, что  $\chi < 0$  для них, а  $\mu < 1$ . Это объясняется, как отмечено выше, тем, что частота орбитального движения электрона, обладающего орбитальным магнитным моментом, па-

раллельным нулю, уменьшается, а частота орбитального движения электрона с орбитальным магнитным моментом, антипараллельным полю, возрастает.

Таблица 2.1

ВЕЩЕСТВО	$\chi$
Азот (при Н.У.)	$-5,0 \cdot 10^{-9}$
Кремний	$-4,2 \cdot 10^{-6}$
Медь	$-9,5 \cdot 10^{-6}$
Галлий	$-2,3 \cdot 10^{-3}$
Ртуть	$-2,9 \cdot 10^{-3}$
Висмут	$-1,6 \cdot 10^{-4}$

В таблице 2.1 приведены значения магнитной восприимчивости некоторых веществ, являющихся диамагнетиками. Отрицательное значение  $\chi$  приводит к тому, что диамагнетик выталкивается из неоднородного магнитного поля в области с меньшим значением индукции.

## 2.20 Парамагнетики

В отличие от диамагнетиков парамагнетики состоят из атомов или молекул, обладающих в отсутствие внешнего поля собственными магнитными моментами. При нулевой индукции внешнего поля такие элементарные моменты ориентированы в пространстве хаотически вследствие наличия теплового движения; поэтому результирующее значение намагниченности в этих условиях равно нулю.

При включении внешнего магнитного поля происходит конкуренция между двумя факторами: дезориентирующим действием теплового движения и ориентирующим действием внешнего поля, старающимся повернуть элемен-

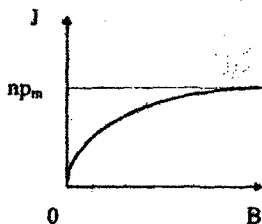


Рис. 2.14

тарные моменты вдоль поля. Кроме описанного процесса, в молекулах парамагнетика, как и любого вообще магнетика, имеется диамагнитный эффект, при котором возникает наведенный момент, направленный против поля. Однако, последний является весьма слабым и его можно не учитывать.

Классическая теория парамагнетизма была создана П. Ланжевеном. Им была получена функция, описывающая намагниченность в зависимости от индукции  $\vec{B}$

$$J = n \cdot p_m L \frac{p_m B}{kT}, \quad (2.71)$$

где  $L(x) = \text{cth} x - \frac{1}{x}$  - функция Ланжевена. График зависимости  $J$  от  $B$  приведен на рисунке 2.14. Рассматривая поведение функции Ланжевена при больших и малых значениях аргумента, можно получить соответствующие выражения для  $J$ .

$$1) \frac{p_m B}{kT} \ll 1, \text{ т.е. } x \ll 1.$$

$$\text{Тогда } \text{cth} x - \frac{1}{x} \cong \frac{\text{ch} x}{\text{sh} x} - 1 \cong \frac{1 + \frac{x^2}{2}}{x + \frac{x^3}{6}} - 1 \cong \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{6} \right) - \frac{1}{x} \cong \frac{x}{3}.$$

Отсюда  $J = \frac{n p_m^2}{3kT} B$ , так как  $\frac{n p_m^2}{3kT} \ll 1$ , то выражение (2.70) дает

$$\chi = \frac{n p_m^2}{3kT}. \quad (2.72)$$

$$2) \frac{p_m B}{kT} \gg 1, \text{ т.е. } x \gg 1.$$

Тогда  $\text{ctg } \chi - \frac{1}{\chi} \cong 1$ .

Отсюда  $J = \mu P_m$ , т.е. намагниченность не зависит от  $B$ , а значит, достигает насыщения. Физически это означает поворот всех элементарных моментов вдоль поля. Следует отметить что при реальных значениях индукции  $B$  этот предельный случай не достигается.

В таблице 2.2 приведены значения магнитной восприимчивости для некоторых парамагнетиков.

Выражение (2.72) известно как закон Кюри, а величина  $C = \frac{\mu P_m^2}{3k}$  называется

постоянной Кюри для парамагнетика, т.е.  $\chi = \frac{C}{T}$ .

Таблица 2.2

ВЕЩЕСТВО	$\chi$
Платина	$+2,9 \cdot 10^{-4}$
Хром	$+2,7 \cdot 10^{-4}$
Ниобий	$+2,6 \cdot 10^{-4}$
Алюминий	$+2,2 \cdot 10^{-5}$
Литий	$+2,1 \cdot 10^{-3}$
Кальций	$+1,9 \cdot 10^{-3}$
Натрий	$+9,1 \cdot 10^{-6}$

### 2.21 Ферромагнетики

Ферромагнитные материалы по отношению к магнитным свойствам во многом схожи с сегнетоэлектриками по отношению к диэлектрическим свойствам. Внутренняя структура представлена магнитными доменами, границы

между которыми называются стенками Блоха. Магнитные моменты атомов в пределах домена строго параллельны ввиду действия специфических квантовых эффектов, поэтому каждый домен намагничен до насыщения  $J_s$  (спонтанная намагниченность) с индукцией насыщения  $B_s$ . Свойства ферромагнитных элементов приведены в таблице 2.3.

Для ферромагнетиков также характерно явление магнитного гистерезиса (см. § 1.10). Материалы, имеющие узкую петлю, называются магнитомягкими, т.к. легко перемагничиваются; они используются в качестве сердечников трансформаторов. Материалы же с большой площадью петли называются магнито жесткими и используются для изготовления постоянных магнитов, т.к. они обладают значительной остаточной намагниченностью. Вид петли аналогичен представленному на рис. 1.18 с заменой осей координат  $E$  на  $H$  и  $p$  на  $J$ .

Таблица 2.3

Материал	Температура Кюри $T_c$ , К	$J_s$ , $\frac{A}{m}$ , при $T=0$	$B_s, T_d$ , при $T=0$
Железо (Fe)	1043	$1,74 \cdot 10^6$	2,18
Кобальт (Co)	1395	$1,45 \cdot 10^6$	1,82
Никель (Ni)	631	$5,11 \cdot 10^5$	0,643
Гадолиний (Gd)	289	$2,11 \cdot 10^6$	2,65
Диспрозий (Dy)	85	$2,92 \cdot 10^6$	3,67

Кроме ферромагнитных, в истинном смысле материалов, имеются другие материалы с упорядоченным строением магнитных моментов в доменах. Это антиферромагнетики, в которых магнитные моменты соседних атомов одинаковы и противоположны; а также ферримагнетики, где соседние моменты противоположны, но различаются по величине. Зависимость на-



магнитности  $J_s$  в домене и восприимчивости  $\chi$  для ферромагнетиков, антиферромагнетиков и ферримагнетиков от температуры приведены соответственно на рисунке 2.15 (а, б, в). Там же схематично изображены атомные моменты в домене.

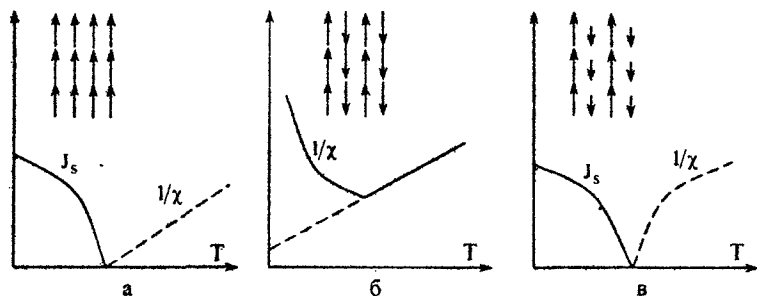


Рис. 2.15

### 3. Электромагнитные волны

#### 3.1. Передача электромагнитного поля вдоль проводов

В простом колебательном контуре можно возбудить свободное колебание с одной собственной частотой  $\omega_0$  (рис. 3.1.а). В связанных между собой двух колебательных контурах будут возбуждаться колебания двух собственных частот  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  (рис. 3.1.б). Увеличивая число колебательных контуров, при этом уменьшая емкость и индуктивность каждого контура (рис. 3.1.в) в пределе, получится двухпроводная линия, в которой емкость и индуктивность будут распределены непрерывно по всей длине (рис. 3.1.г). Это, так называемая, распределенная система (система с распределенными параметрами). Тогда число различных собственных колебаний будет бесконечным.

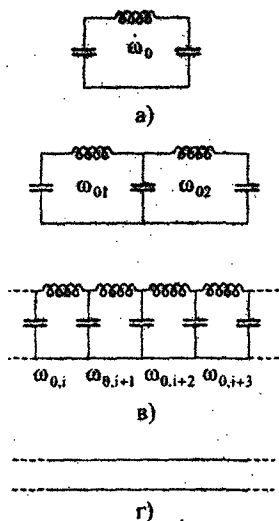


Рис. 3.1

проводной линии как предельному случаю в механике соответствует резиновый шнур или струна, масса и упругость которых непрерывно распределены по всей длине. Число степеней свободы струны равно бесконечности, значит в ней возможно бесконечное число собственных колебаний (рис. 3.2.в). Колебательные движения струны представляют собой механические волны.

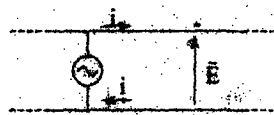


Рис. 3.3

Перейдем к рассмотрению механических аналогов. Простому колебательному контуру в механике соответствует материальная точка, имеющая одну степень свободы и находящаяся под действием упругой силы. Она может колебаться с одной определенной частотой (рис. 3.2.а). Случаю двух связанных контуров механическим аналогом является система из двух связанных между собой материальных точек, каждая из которых может двигаться лишь в одном направлении и находится под действием упругих сил. Такая система обладает двумя степенями свободы и в ней возможны два разных типа собственных колебаний (рис. 3.2.б).

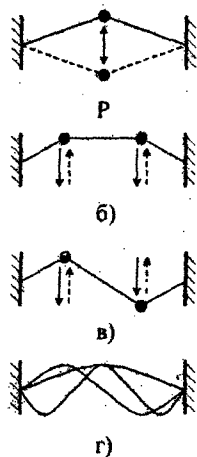


Рис. 3.2.

Таким образом, электрические колебания в распределенных электрических системах (как вышерассмотренная двухпроводная линия) представляют собой электромагнитные

волны.

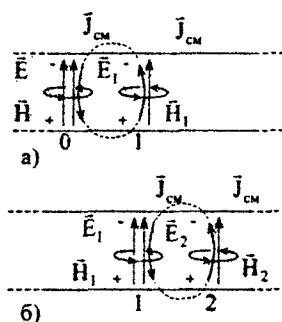


Рис. 3.4

Пусть в двухпроводной линии, неограниченной с обеих сторон, имеется источник переменного тока (рис. 3.3), который будет заставлять электроны перемещаться вдоль линии, тем самым создавая токи проводимости  $i$ . С перемещаемыми зарядами перемещается и электрическое поле, создаваемое этими зарядами.

Таким образом, перемещать электрическое поле вдоль проводной линии можно с помощью токов проводимости. Но Максвелл доказал, что существует другой способ передачи поля: посредством распространения электромагнитных волн. В

этом случае главная роль отводится токам смещения  $\vec{J}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , а они стано-

вятся существенными, если поля являются быстро изменяющимися (т.е. имеют большие частоты колебаний). Рассмотрим этот процесс более подробно. Пусть в точке 0 в некоторый момент времени поле  $\vec{E}$  начало увеличиваться

ся  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} > 0$ . Тогда здесь возникает ток смещения с плотностью

$\vec{J}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , которое имеет направление, совпадающее с направлением  $\vec{E}$  (рис. 3.4.a). Вокруг тока смещения возникает магнитное поле  $\vec{H}$ , направление которого определяется правилом правого буравчика.

Изменяющееся магнитное поле по закону электромагнитной индукции вызывает появление вихревого электрического поля  $\vec{E}_1$  (рис. 3.4.a), направление которого определяется по правилу Ленца. Возрастающее поле  $\vec{E}_1$ , является током смещения, который возбуждает магнитное поле  $\vec{H}_1$ . В точке 0 по-

ле  $\vec{E}_1$  направлено противоположно полю  $\vec{E}$ , компенсируя его. Также поле  $\vec{H}_1$  компенсирует поле  $\vec{H}$ . Таким образом, первоначальное поле  $\vec{E}$  и вызванное им поле  $\vec{H}$  исчезнут, но в соседней точке 1 вдоль линии возникнут поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{H}_1$ . Далее процесс повторится (рис. 3.4.6), и через некоторое время исчезнут поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{H}_1$  в точке 1, но возникнут поля  $\vec{E}_2$  и  $\vec{H}_2$  в точке 2, ещё более удаленной от точки 0 вдоль линии. Как видно, электрические и магнитные поля, создавая друг друга, будут перемещаться вдоль линии. Этот процесс представляет собой распространение электромагнитного импульса. Возрастание и убывание полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в каждой точке происходит одновременно, то есть  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  находятся в одной фазе, причем направления  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны как друг другу, так и скорости распространения  $\vec{v}$ :

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{v}.$$

Эти векторы образуют правую тройку векторов: направление скорости  $\vec{v}$  совпадает с направлением поступательного движения правого буравчика, если его рукоятка вращается от  $\vec{E}$  к  $\vec{H}$  по кратчайшему пути (рис. 3.5).

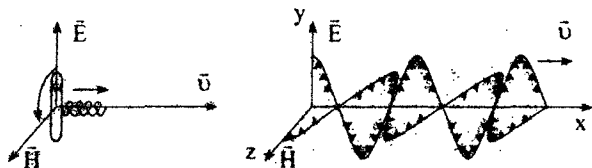


Рис. 3.5

Итак, существуют два различных процесса перемещения поля:

- 1) с помощью токов проводимости – он является основным при малых частотах колебаний, так как токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости;

2) с помощью токов смещения (электромагнитными волнами) – он является основным при больших частотах колебаний, когда токи смещения играют главную роль.

### 3.2 Образование стоячей электромагнитной волны в двухпроводной линии

Если двухпроводная линия ограничена в длине, тогда распространяющаяся по ней электромагнитная волна будет отражаться от концов линии. Отраженная волна будет складываться с первоначальной волной, в результате возникает стоячая электромагнитная волна.

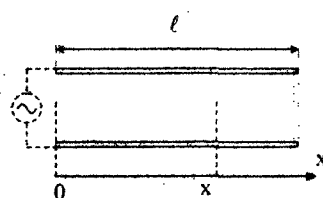


Рис. 3.6

Рассмотрим механизм её образования. Пусть в начале двухпроводной линии (точка 0, рис. 3.6) происходит колебание электрического поля первичной волны по гармоническому закону:

$$E_1(0; t) = E_0 \sin \omega t. \quad (3.1)$$

Тогда колебания в точке  $x$  будут запаздывать относительно колебаний в точке 0 на время распространения импульса  $\tau = x/v$ :

$$E_1(x; t) = E_0 \sin \omega(t - \tau) = E_0 \sin(\omega t - \omega \tau / v). \quad (3.2)$$

Расстояние между двумя соседними точками, колеблющихся в одинаковой фазе, есть длина волны  $\lambda$ . Это расстояние волна проходит за время одного колебания  $T$  (период), тогда:

$$\lambda = v \cdot T. \quad (3.3)$$

А так как  $\omega = 2\pi/T$ , то (3.2) можно преобразовать следующим образом:

$$E_1(x; t) = E_0 \sin(\omega t - 2\pi \cdot x/\lambda) = E_0 \sin(\omega t - k \cdot x), \quad (3.4)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , - волновое число.

Аналогичная формула получается и для магнитного поля:

$$H(x; t) = H_0 \sin(\omega t - k \cdot x). \quad (3.5)$$

Конечно в реальных условиях распространяющаяся волна имеет затухающий характер, то есть амплитуды  $E_0$  и  $H_0$  по мере распространения волны должны уменьшаться. Для простоты будем считать, что затухание волны на длине линии несущественно, тогда отраженная от конца линии электрическая составляющая электромагнитного поля имеет вид:

$$E_2(x; t) = E_0 \sin(\omega t + kx - \varphi). \quad (3.6)$$

Знак (+) у слагаемого  $kx$  показывает, что отраженная волна распространяется в отрицательном направлении оси  $X$ . Угол  $\varphi$  выражает запаздывание по фазе колебаний поля отраженной волны в 0 по сравнению с колебаниями первичной волны в той же точке. Это запаздывание возникает вследствие того, что волна должна пройти расстояние  $l + (l - x)$ , дающее отставание по фазе, и кроме того, при отражении возможно изменение фазы. Результирующее поле после сложения двух волн равно:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx - \varphi)] = \\ &= 2 \cdot E_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right) = E_s \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Полученное выражение показывает, что вдоль линии будут происходить гармонические колебания поля с той же частотой  $\omega$  и с начальной фазой  $(-\varphi/2)$ . А амплитуда колебаний  $E_s$  зависит от координаты  $x$ :

$$E_s = 2 \cdot E_0 \cos(kx - \varphi/2).$$

В одних точках  $E_s$  достигает максимума. Эти точки называются пучностями электрического поля. Координаты  $x_n$  пучностей определяются условием:

$$k \cdot x_n - \varphi/2 = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi.$$

Расстояние  $\Delta x$  между соседними пучностями равно:

$$k\Delta x = \pi \text{ или } \Delta x = \lambda/2. \quad (3.8)$$

В других точках  $E_z$  обращается в нуль. Эти точки называются узлами электрического поля. Их координаты  $x_{узл}$  определяются условием:

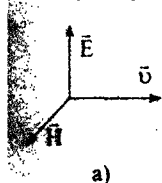
$$k \cdot x_{узл} - \varphi/2 = \pi/2, 3\pi/2, \dots, (2n+1)\pi/2.$$

Тогда два соседних узла находятся на расстоянии:

$$\Delta x = \lambda/2. \quad (3.9)$$

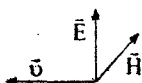
Таким образом, расстояние между двумя соседними узлами или между двумя соседними пучностями одинаково и равно половине длине волны, то есть  $\lambda/2$ .

При отражении электромагнитной волны от конца линии происходит, как



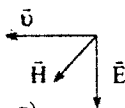
а)

до отражения



б)

после отражения



в)

Рис. 3.7

указывалось выше, изменение фазы колебаний одного из полей. Это связано с тем, что  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{v}$  образуют правую тройку

векторов (рис. 3.7.а).

При отражении волны вектор скорости  $\vec{v}$  изменяется на противоположное направление, тогда один из векторов  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  также должен изменить знак, а это значит, что соответствующее поле скачкообразно изменяет фазу колебаний на  $\pi$ .

Причем, если фаза электрического поля не изменяется, тогда изменяется фаза магнитного поля (рис. 3.7.б), и наоборот, если фаза магнитного поля не изменяется, то изменяется фаза электрического поля (рис. 3.7.в). Первому случаю соответствует отражение волны от разомкнутой линии, так как пере-

менные токи в проводах будут вызывать на конце линии наибольшие заряды, тогда здесь же будет расположена пучность электрического поля (напряжения). А это значит, что электрическое поле в отраженной волне направлено так же, как и в падающей, т.е. оно не изменяет фазы. Тогда амплитуда тока на концах линии будет равна нулю, значит здесь будет узел тока и, соответственно, узел магнитного поля. Это означает, что магнитное поле в отраженной волне направлено противоположно полю падающей волны, т.е. оно изменяет фазу на  $\pi$ . Второй случай - это отражение волны от замкнутой на конце линии проводящей перемычкой. Так как концы проводов замкнуты, то напряжение между ними всегда равно нулю, тогда здесь расположен узел напряжения и электрического поля. А это значит, что колебания электрических полей в падающей и отраженной волнах находятся в противофазе. В то же

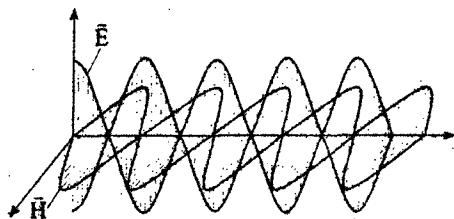


Рис. 3.8

время амплитуда тока в проводящей перемычке будет наибольшей, значит на конце линии образуется пучность тока, а следовательно и пучность магнитного поля.

Таким образом, в стоячей электромагнитной волне узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного поля и наоборот (рис. 3.8).

Если двухпроводная линия ограничена с двух сторон и имеет длину  $l$ , причем пусть для определенности она разомкнута с обеих сторон, тогда на ее концах всегда должны быть расположены пучности электрического поля (напряжения) и узлы магнитного поля (тока). А это значит, что в этой линии возможны только такие стоячие волны, которые удовлетворяют этим условиям. В этом случае на длине  $l$  должно уложиться число полуволн:



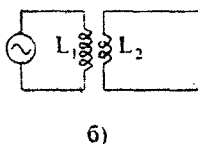
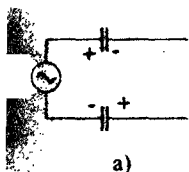
$$l = \frac{1}{2} \lambda n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

А так как длина волны  $\lambda$ , частота  $\nu$  и скорость электромагнитной волны  $u$  связаны соотношением  $u = \lambda \cdot \nu$ , тогда частоты  $\nu_n$  различных стоячих волн равны:

$$\nu_n = \frac{u}{2 \cdot l} n. \quad (3.11)$$

Формулы (3.10) и (3.11) получатся и для случая, если концы линии будут замкнуты проводящей перемычкой. Отличие будет лишь в том, что в этом случае на концах линии будут расположены узлы электрического поля (а не пучность) и пучности магнитного поля (а не узлы).

Таким образом, в ограниченной двухпроводной линии возможны только



определенные стоячие волны, являющиеся собственными колебаниями линии. Эти колебания имеют дискретный набор частот.

Рис. 3.9

Для возбуждения в рассмотренной линии одной из собственных колебаний генератор переменного тока должен иметь частоту, совпадающую с одной из собственных частот линии  $\nu_n$ . В противном случае устойчивой волны не получится. Возбудить электромагнитные волны в двухпроводной линии с помощью генератора переменного тока можно следующими способами: посредством емкостной связи (рис. 3.9.а) и через индуктивную связь (рис. 3.9.б).

В первом случае генератор создает колебания напряжения, следовательно, электрического поля, и в линии возникает электромагнитная волна.

Во втором случае при работе генератора в витках  $\ell_2$  линии возникает э.д.с. взаимной индукции, тогда в этом месте линии возникают колебания тока, следовательно, магнитного поля, что также приводит к возникновению электромагнитной волны.

Для обнаружения пучности электрического поля можно использовать га-

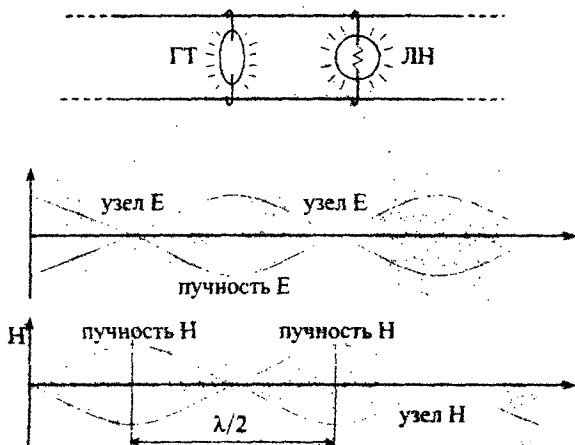


Рис. 3.10

зоразрядную трубку (индикаторная “неоновая” лампочка), включив ее между проводами линии (рис. 3.10, ГТ). В тех местах линии, где находятся узлы электрического поля она не будет светиться, но будет зажигаться там, где находятся пучности электрического поля, так как электрическое поле, ионизируя газ, вызывает его свечение.

Пучности магнитного поля можно выявить с помощью лампы накаливания, также включив ее между проводами (рис. 3.10, ЛН). Она не будет светиться в местах расположения узлов магнитного поля, зато даст свечение в местах пучности магнитного поля.

Процесс образования электромагнитных волн, распространяющихся вдоль проводов, происходит в основном в окружающем провода пространстве, то есть провода выполняют вспомогательную роль, определяя лишь направление распространения волны. Электромагнитные волны могут существовать и без проводов; в этом случае говорят о свободных электромагнитных волнах.

### 3.3 Возникновение свободных электромагнитных волн

Пусть в некоторой области пространства нет свободных электрических зарядов, тогда объемная плотность заряда равна нулю ( $\rho = 0$ ), и отсутствуют токи проводимости ( $\vec{j} = 0$ ). Если в некоторой точке 0 (рис. 3.11) такой среды

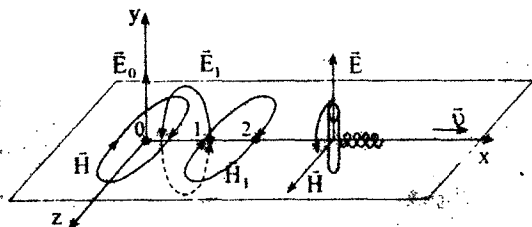


Рис. 3.11

возбудить каким-либо способом электрическое поле  $\vec{E}_0$ , которое в дальнейшем не поддерживается электрическими зарядами, то это поле предоставлен-

ное самому себе начнет убывать ( $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} < 0$ ). Это приведет к возникновению

тока смещения  $\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (но не тока проводимости!), и тогда согласно урав-

нению Максвелла, будет возбуждаться вихрь магнитного поля  $\vec{H}$  вокруг точки 0 в плоскости перпендикулярной вектору  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E}$ :

$$[\vec{\nabla} \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Направление силовых линий  $\vec{H}$  в этот момент будет против часовой стрелки, если смотреть вдоль  $\vec{E}_0$ , т.к.  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} < 0$ . А так как в этой среде нет постоянных макроскопических токов, которые могли бы поддерживать поле  $\vec{H}$ , то это магнитное поле после своего возникновения начнет с некоторого времени исчезать ( $\partial H < 0$ ), и в соответствии с законом электромагнитной индукции в Максвелловской записи имеем:

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

А это значит, что возбуждается вихрь электрического поля  $\vec{E}_1$ , которое будет направлено в точке 0 противоположно полю  $\vec{E}_0$ , тем самым компенсируя его, но в тоже время это поле возникает в точке 1, более удаленной от точки 0 вдоль оси x.

С некоторого момента электрическое поле  $\vec{E}_1$ , не поддерживаемое электрическими зарядами, начнет исчезать, что приведет к появлению магнитного поля  $\vec{H}_1$ , которое компенсирует поле  $\vec{H}$ , но зато обнаружится в более удаленной точке 2. Таким образом взамен исчезнувшего поля  $\vec{E}_0$  в точке 0, будут возникать взаимосвязанные друг с другом и распространяющиеся в пространстве магнитное и электрическое поля, то есть возникнет электромагнитная волна.

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и вектор скорости распространения волны  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов: если вращать буравчик с правой резьбой так, чтобы его рукоятка поворачивалась от вектора  $\vec{E}$  к вектору  $\vec{H}$ , то направление поступательного движения буравчика должно совпасть с направлением вектора  $\vec{v}$ , то есть с направлением распространения электромагнитной волны.

Существование электромагнитных волн было предсказано ещё М. Фарадеем в 1832г. Затем Дж. Максвелл в 1865г. теоретически доказал, что электромагнитные колебания должны распространяться в вакууме со скоростью света и, что свет представляет из себя электромагнитные волны. В 1888г. немецкий физик Г. Герц получил и исследовал электромагнитные волны в диапазоне длин волн от 0,6м до 10м. Первую радиопередачу на расстояние в 250 метров с помощью электромагнитных волн осуществил в 1896г. А.С. Попов. В этой передаче были переданы всего два слова "Генрих Герц" и с этого началось бурное развитие радиотехники.

Электромагнитными волнами являются радиоволны, инфракрасное (тепловое) излучение, видимый свет, рентгеновские лучи и гамма излучение. Все эти волны отличаются лишь частотой излучения, хотя возникновение их происходит вследствие колебания зарядов в различных колебательных системах, начиная с радиотехнических устройств и вплоть до атомных ядер.

### 3.4 Получение волнового уравнения для электромагнитного поля

Дж. Максвелл теоретически доказал возможность существования электромагнитных волн, которые вытекают из его уравнений. Это можно доказать следующим образом.

Рассмотрим однородную, изотропную, электрически нейтральную ( $\rho = 0$ ) и непроводящую ( $j = 0$ ) среду, которая является диэлектриком, и пусть она не обладает ни сегнетоэлектрическими, ни ферромагнитными свойствами, тогда  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H}$ , где  $\epsilon$  и  $\mu$  - постоянные скалярные величины, не зависящие ни от координат, ни от времени. С учетом сказанного, уравнения Максвелла примут вид:

$$[\bar{\nabla}\bar{E}] = -\mu_0\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$\bar{\nabla}\bar{H} = 0 \quad (3.13)$$

$$[\bar{\nabla}\bar{H}] = \epsilon_0\epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\bar{\nabla}\bar{E} = 0. \quad (3.15)$$

Продифференцируем первое уравнение по времени:

$$\left[ \bar{\nabla}, \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right] = -\mu_0\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2},$$

подставим в него из третьего уравнения  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{[\bar{\nabla}\bar{H}]}{\epsilon_0\epsilon}$ , тогда получаем:

$$[\bar{\nabla}, [\bar{\nabla}\bar{H}]] = -\epsilon_0\epsilon \cdot \mu_0\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}.$$

Раскрывая левую часть как двойное векторное произведение по формуле "БАЦ минус ЦАБ" и учитывая (3.15), получим:

$$[\bar{\nabla}, [\bar{\nabla}\bar{H}]] = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{E}) - \nabla^2\bar{H} = -\nabla^2\bar{H} \quad \text{или} \quad \nabla^2\bar{H} = \epsilon_0\mu_0\epsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}, \quad (3.16)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа.

Рассмотрим произведение постоянных  $\epsilon_0 \cdot \mu_0$ :

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} \cdot \frac{1}{(\text{м с})^2}.$$

В этом выражении знаменатель как по числовому значению, так и по размерности совпадает с квадратом скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Величина  $c$  получила название электродинамической постоянной.

Таким образом:

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Полученное выражение подставим в (3.16):

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

Это выражение представляет собой типовое волновое уравнение. Решением для  $\vec{H}$  является волна, распространяющаяся с фазовой скоростью  $v = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ ,

где  $\sqrt{\mu \epsilon} = n$  является показателем преломления среды. В вакууме  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  и тогда скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света.

Аналогично получается волновое уравнение для вектора  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.18)$$

Простейшими решениями волновых уравнений (3.17) и (3.18) являются соответствующие функции:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_m \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1) \\ \vec{E} &= \vec{E}_m \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2), \end{aligned} \quad (3.19)$$

которые представляют собой уравнения плоских бегущих волн в некотором направлении. Чтобы эти уравнения удовлетворяли (3.12) и (3.14), необходимо совпадение аргументов:

$$\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1 \quad \text{и} \quad \omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2,$$

то есть у них должны совпадать: а) частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2\pi\nu$ ; в) волновые

вектора  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  - орт направления распространения волны,

$\lambda$  - длина волны; с) начальные фазы  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . А это значит, что колебания электрического и магнитного векторов происходят синхронно, т.е. находятся в фазе и распространяются они в одном направлении с одной и той же скоро-

стью – скоростью света. Таким образом, уравнения (3.19) должны быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \bar{H}_m \cos(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \varphi_0) \\ \bar{E} &= \bar{E}_m \cos(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \varphi_0)\end{aligned}\quad (3.20)$$

Эти два поля составляют единое электромагнитное поле, которое в виде электромагнитной волны распространяется в пространстве.

В электромагнитной волне векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  ортогональны как друг другу, так и направлению распространения, то есть электромагнитные волны являются поперечными.

### 3.5 Ортогональность векторов в электромагнитной волне

В ортогональности векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  можно убедиться следующим образом. Рассмотрим производную по времени от произведения ( $\bar{E} \cdot \bar{H}$ ):

$$\frac{\partial(\bar{E}\bar{H})}{\partial t} = \bar{E} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (3.21)$$

Подставим сюда, получаемое из (3.12) выражение для  $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$  и из (3.13) выра-

жение для  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ , тогда получим:

$$\frac{\partial(\bar{E}\bar{H})}{\partial t} = -\frac{\bar{E}[\nabla\bar{E}]}{\mu_0\mu} + \frac{\bar{H}[\nabla\bar{H}]}{\epsilon_0\epsilon} = 0,$$

так как  $\bar{E} \perp [\nabla\bar{E}]$  и  $\bar{H} \perp [\nabla\bar{H}]$ . Это означает, что  $\bar{E}\bar{H} = \text{const}$ , но

$$\bar{E}\bar{H} = \bar{E} \cdot \bar{H} \cdot \cos(\bar{E} \wedge \bar{H}) = E_m H_m \cos^2(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \varphi_0) \cdot \cos(\bar{E} \wedge \bar{H}),$$

а в этом выражении  $\cos^2(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \varphi_0)$  не является постоянной, значит ( $\bar{E}\bar{H}$ ) может быть равна только нулю, что обеспечивается при условии



$\cos(\vec{E} \wedge \vec{H}) = 0$ , тогда угол  $(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \pi/2$ , а это и означает, что  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , то есть эти вектора действительно ортогональны.

В поперечности электромагнитных волн можно убедиться следующим образом.

### 3.6. Поперечность электромагнитных волн

Волновой поверхностью называется поверхность, в каждой точке которой фаза колебаний имеет одно и тоже значение. В электромагнитной волне колеблющимися величинами, как было показано, являются  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Ясно, что волновых поверхностей бесконечное множество. Если волновые поверхности являются сферами, то волна называется сферической. Если волновые поверхности являются плоскостями, то речь идет о плоских электромагнитных волнах.

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $x$ . Тогда волновые поверхности перпендикулярны оси  $x$ . Вдоль волновой поверхности компоненты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не зависят от  $y$  и  $z$ , а зависят лишь от  $x$ , а также изменяются со временем  $t$ :

$$\vec{E} = \vec{i}E_x(x,t) + \vec{j}E_y(x,t) + \vec{k}E_z(x,t) \quad (3.22)$$

$$\vec{H} = \vec{i}H_x(x,t) + \vec{j}H_y(x,t) + \vec{k}H_z(x,t). \quad (3.23)$$

Подставим (3.22) в (3.15), и учитывая, что частные производные компоненты  $\vec{E}$  по  $y$  и  $z$  равны нулю, получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (3.24)$$

Это значит, что  $E_x$  не зависит от  $x$ .

Теперь рассмотрим  $x$  - компоненту уравнения (3.14):

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (3.25)$$

Здесь левая часть также в силу независимости компонент  $\vec{H}$  от  $y$  и  $z$  равна нулю, тогда:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad (3.26)$$

то есть  $E_x$  не зависит от времени  $t$ .

Таким образом, из (3.24) и (3.26) вытекает, что  $x$  – компонента вектора  $\vec{E}$ , т.е.  $E_x$ , остается постоянной, тогда ее можно исключить из рассмотрения, так как эта компонента создается внешним стационарным полем, не связанным с волной. Значит в волне  $E_x = 0$ , таким образом:

$$\vec{E} = \vec{j}E_y + \vec{k}E_z, \quad (3.27)$$

то есть вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости волновой поверхности, иначе говоря,  $\vec{E}$  перпендикулярен направлению распространения волны.

Подобным образом можно показать ортогональность между вектором  $\vec{H}$  и осью  $x$ , а это и означает, что электромагнитные волны поперечны.

### 3.7 Связь между модулями магнитной и электрической составляющими в электромагнитной волне

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 3.12). Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{v}$  составляют правую тройку векторов. Совместим ось  $y$  с направлением вектора  $\vec{E}$ , тогда вектор  $\vec{H}$  будет направлен вдоль оси  $z$ . В этом случае компоненты  $E_x$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  отсутствуют:

$$\vec{E} = (0, E_y, 0) = \vec{j}E_y = \vec{j}E,$$

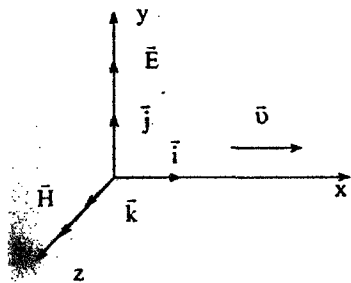


Рис. 3.12

$$\vec{H} = (0, 0, H_z) = \vec{k}H_z = \vec{k}H, \quad (3.28)$$

где векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - орты координат.

Из уравнения  $[\vec{\nabla}\vec{E}] = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  полу-

чаем 
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Из уравнения  $[\vec{\nabla}\vec{H}] = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  получаем

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (3.30)$$

Выражение, описывающее плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $x$ , должно представлять из себя функцию от аргумента  $t - \frac{x}{v} = \xi$ , тогда

$$E_y = E_y\left(t - \frac{x}{v}\right) = E_y(\xi), \quad (3.31)$$

$$H_z = H_z\left(t - \frac{x}{v}\right) = H_z(\xi). \quad (3.32)$$

Частные производные этих функций от  $x$  и  $t$ , учитывая, что  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$ ,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}, \text{ равны}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{dE_y}{d\xi}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{dE_y}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dE_y}{d\xi}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{dH_z}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{dH_z}{d\xi}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{dH_z}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dH_z}{d\xi}, \quad (3.36)$$

Подставляя (3.33) и (3.36) в (3.29), получим:

$$\frac{1}{v} \frac{dE_y}{d\xi} = \mu_0 \mu \frac{dH_z}{d\xi}, \quad (3.37)$$

сокращая на  $d\xi$  и учитывая, что  $\frac{1}{v} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}$ , перепишем (3.37)

$$\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} dE_y = \mu_0 \mu dH_z \text{ или } \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} dE_y = \sqrt{\mu_0 \mu} dH_z, \quad (3.38)$$

после интегрирования этого выражения получаем

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E_y = \sqrt{\mu_0 \mu} H_z. \quad (3.39)$$

Здесь постоянные интегрирования отброшены, так как они не принадлежат электромагнитной волне.

При произведенном выборе координатных осей величины  $|E_y|$  и  $|H_z|$  являются модулями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (см. 3.12). Таким образом, связь между модулями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеет вид

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (3.40)$$

Это соотношение справедливо для любой бегущей электромагнитной волны, независимо от формы ее волновой поверхности.

### 3.8 Энергия электромагнитных волн

Электромагнитная волна состоит из двух составляющих: электрической ( $\vec{E}$ ) и магнитной ( $\vec{H}$ ), тогда плотность энергии  $\omega$  волны будет складываться из плотности электрического поля  $\omega_E$  и плотности магнитного поля  $\omega_H$ .

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (3.41)$$

С учетом (3.41) получаем:

$$\omega = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} \vec{E} \vec{H}. \quad (3.42)$$

Рассмотрим в поле электромагнитной волны площадку  $S$  (Рис. 3.13). За время  $\Delta t$  через эту площадку переносится энергия  $\Delta W$ , заключенная в объеме

$$\Delta V = S v \Delta t \cos \alpha,$$

где  $v$  - скорость распространения волны, скорость света в данной среде.

$$\Delta W = \omega \Delta V = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} \vec{E} \vec{H} S v \Delta t \cos \alpha. \quad (3.43)$$

Учтем, что  $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} = \frac{1}{v}$ , тогда из (3.43)

$$\text{получаем} \quad \omega = \frac{EH}{v}. \quad (3.44)$$

Из (3.44) получаем

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = EHS \cos \alpha \quad \text{или} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = EHS \cos \alpha. \quad (3.45)$$

Введем вектор потока электромагнитной энергии

$$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}], \quad (3.46)$$

так как  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , то  $P = EH$ , причем  $\vec{P} \perp \vec{E}, \vec{H}$  и совпадает по направлению с  $\vec{v}$ , тогда (3.46) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P S \cos \alpha = P_n S = \vec{P} \vec{S}. \quad (3.47)$$

Таким образом перенос энергии в электромагнитном поле характеризуется вектором потока энергии  $\vec{P}$ , называемым вектором Умова - Пойнтинга (вектор Пойнтинга).

Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность  $S$ . Величина  $\frac{\partial W}{\partial t}$  - убыль полной энергии внутри объема  $V$ , охваченно-

сть  $S$ . Величина  $\frac{\partial W}{\partial t}$  - убыль полной энергии внутри объема  $V$ , охваченно-

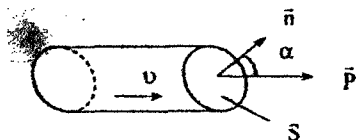


Рис. 3.13

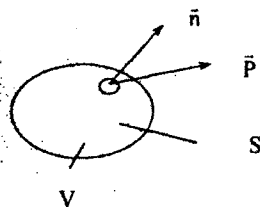


Рис. 3.14

го замкнутой поверхностью  $S$ , за единицу времени. Она должна равняться (в силу закона сохранения энергии) той энергии, которая выходит через поверхность  $S$  за единицы времени наружу. Тогда:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{P} d\vec{S}:$$

Полученное соотношение выражает теорему Пойнтинга. *Энергия, выходящая из некоторого объема  $V$  за единицу времени равна потоку вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую этот объем.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики, Т.2. -М.: Наука, 1982, 432с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, Т. 2. -М.: Наука, 1977, 520 с.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Е. Курс физики, Т. 2. -М.: Высш. шк., 1973, 384 с.
4. Зисман Г.А., Толес О.М. Курс общей физики, Т. 2. -М.: Наука, 1974 336 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Электричество .....	3
1.1. Электрическое поле. Закон Кулона .....	3
1.2. Напряженность электрического поля. Непрерывное распределение зарядов. Принципы суперпозиции полей .....	6
1.3. Электростатическая теорема Гаусса .....	8
1.4. Примеры использования теоремы Гаусса для расчета напряженности поля .....	10
1.5. Потенциал электростатического поля. Энергия системы зарядов ...	13
1.6. Диполь. Мультиполи .....	16
1.7. Электрическое поле в диэлектриках .....	18
1.8. Электрическая индукция .....	21
1.9. Условия сопряжения векторов напряженности и индукции на границах раздела сред .....	23
1.10. Механизмы поляризации диэлектриков .....	25
1.11. Электрическое поле в проводниках .....	29
1.12. Емкость. Конденсаторы .....	30
1.13. Соединение конденсаторов .....	32
1.14. Энергия заряженного конденсатора. Энергия поля .....	34
1.15. Электрический ток. Сила тока. Плотность тока .....	35
1.16. Электродвижущая сила. Напряжение. Разность потенциалов .....	37
1.17. Закон Ома (интегральная и дифференциальная формы) для однородных и неоднородных участков цепи .....	40
1.18. Правила Кирхгофа. Закон Джоуля-Ленца .....	41
2. Магнетизм .....	45
2.1. Магнитное поле. Сила Ампера .....	45
2.2. Закон Био – Савара – Лапласа .....	46
2.3. Магнитное поле прямолинейного проводника с током .....	48



2.3 Магнитное поле кругового тока .....	49
2.4 Магнитное поле соленоида .....	50
2.5 Сила электрического тока .....	51
2.6 Поле движущегося заряда .....	52
2.7 Дивергенция и ротор магнитного поля .....	52
2.8 Поле тороида и соленоида .....	53
2.9 Контур с током в магнитном поле .....	54
2.10 Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле .....	56
2.11 Сила Лоренца .....	57
2.12 Электромагнитная индукция .....	58
2.13 Контур в магнитном поле .....	60
2.14 Вихревые токи .....	60
2.15 Явление самоиндукции .....	62
2.16 Взаимная индукция .....	63
2.17 Энергия магнитного поля .....	64
2.18 Магнитное поле в магнетиках .....	65
2.19 Диамагнетизм .....	67
2.20 Парамагнетики .....	69
2.21 Ферромагнетики .....	71
3. Электромагнитные волны .....	73
3.1 Передача электромагнитного поля вдоль проводов .....	73
3.2 Образование стоячей электромагнитной волны в двухпроводной линии .....	77
3.3 Возникновение свободных электромагнитных волн .....	83
3.4 Получение волнового уравнения для электромагнитного поля .....	85
3.5 Ортогональность векторов в электромагнитной волне .....	88
3.6 Поперечность электромагнитных волн .....	89

<b>3.7</b> Связь между модулями магнитной и электрической составляющими в электромагнитной волне .....	<b>90</b>
<b>3.8</b> Энергия электромагнитных волн .....	<b>92</b>

Геннадий Николаевич Талызов  
Виктор Геннадьевич Кульков  
Михаил Маркович Кумыш

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

**ФИЗИКА. Часть 2  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Учебное пособие*

Редактор Е.М. Марносова  
Темплан 2003, поз. № 99  
Лицензия ИД № 04790 от 18.05.2001.

Подписано в печать 11.07.03 Формат 60x84 1/16.  
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ.л. 58  
Уч.-изд.л. 60. Тираж 300 экз. Заказ 510.

Волгоградский государственный технический университет,  
400131 Волгоград, просп. им. В.И. Ленина, 28.  
РГПК "Политехник" Волгоградского государственного  
технического университета.  
400131 Волгоград, ул. Советская, 35.