МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский энергетический институт
(технический университет)
Волжский филиал

С.В.Кулешина, В.П.Мельников

ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ.
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания по обработке данных лабораторных работ
в курсе “Физика”

Волжский 2001

УДК 58.08

Рецензент: Староверов В.В., канд. техн. наук, доцент кафедры СД

С.В.Кулешина, В.П.Мельников

Физический эксперимент. Статистическая обработка результатов эксперимента.
Методические указания по обработке данных лабораторных работ в курс "Физика"

В методических указаниях рассмотрены вопросы проведения и обработки результатов физического эксперимента и выполнения технических измерений с помощью специальных технических средств.

В процессе выполнения работы студенты получают навыки пользования мерительным инструментом и статистической обработки результатов прямых измерений.

Предназначены для студентов I и II курсов дневной и вечерней форм обучения ВТУЗов

УДК 58.08

ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель эксперимента – определить значение физической величины, оценить ее в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения. Любая физическая величина обладает истинным значением, идеальным образом отражающим соответствующие свойства объекта. Однако несовершенство средств измерений, физическая природа самой измеряемой величины, а также другие факторы приводят к тому, что эксперимент дает не истинное значение физической величины, а ее приближённое значение, называемое действительным значением. Это значение должно быть достаточно близко к истинному значению, чтобы быть использованным вместо него.

Измерение – нахождение значения физической величины с помощью специспециальных технических средств. Измерения могут быть прямыми, при которых значение физической величины находят непосредственно по отсчётному устройству измерительного прибора. Например: измерение линейных размеров штангенциркулем, силы тока - амперметром, времени – секундомером и т.п.

Если искомая физическая величина вычисляется по формулам на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными прямым измерением, такие измерения называются косвенными, при этом используются функциональные зависимости типа

$$y = f(x_1; x_2 \ldots)$$

Например, нахождение объёма тела по его линейным размерам, расчёт сопротивления проводника по показаниям вольтметра и амперметра.

Основное качество измерения - его точность.Точность измерения определяется близостью результата измерения к истинному значению физической величины. Эту оценку можно сделать, найдя погрешность измерения.

1 Погрешность измерения

Погрешность измерения – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Существуют несколько способов классификации погрешности измерения.

1.1 Классификация погрешности измерений по форме числового выражения

По форме числового выражения различают абсолютную и относительную погрешности. Абсолютная погрешность – разность между результатом измерения $x_{изм}$ и истинным значением физической величины X. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины X:

$$\Delta x = |x_{изм} - X| \tag{1}$$

Относительная погрешность – отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{X} \qquad (2)$$

Относительная погрешность – безразмерная величина, она может быть выражена в процентах.

1.2 Классификация погрешности измерения по характеру появления в эксперименте

По характеру появления в эксперименте различают систематическую и случайную погрешности. Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, возникающая вследствие неисправности приборов, несовершенства методики измерения и остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях.

Случайная погрешность – составляющая погрешности, изменяющаяся случайным (непредсказуемым) образом при повторных измерениях одной и той же величины, обусловленная несовершенством наших органов чувств и другими заранее непредсказуемыми причинами.

Грубая погрешность (промах) – погрешность, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях. Как правило, это ошибка экспериментатора. Результат измерения, отягченный промахом, исключается из дальнейшей обработки.

1.3 Классификация погрешности по источнику появления

По источнику появления различают погрешность эксперимента, погрешность метода эксперимента и погрешность средств измерения.

Погрешность эксперимента – совокупность погрешностей связанных непосредственно с измерениями. Это погрешность отсчитывания погрешность интерполяции, погрешность от параллакса и т. п.

Погрешность метода измерений – составляющая систематической погрешности измерений, зависящая от несовершенства метода измерений несовершенства теории, положенной в основу экспериментального метода и т. п.

Погрешность средств измерения – инструментальная погрешность. Она зависит от погрешности применяемых средств измерения, т.е. от принципа действия средства измерения, тщательности его изготовления, степени защищённости от внешних помех и т.п. и включает в себя как систематическую так и случайную составляющую.

2 Расчёт погрешности прямого измерения

Погрешность прямого измерения складывается из следующих составляющих: случайной погрешности, инструментальной и систематической погрешности, связанной с методикой измерения или с неисправностью средств измерения.

Величина и знак систематической ошибки, как правило, одинаковы во всех измерениях, проводимых одним и тем же методом, с помощью одного и того же прибора. Кроме того, если заведомо известно, что при измерении данной величины данным методом систематическая погрешность существенно больше случайной, то измерения выполняют только один раз.

2.1 Случайная погрешность

В большинстве случаев при повторении одного и того же измерения результаты отличаются друг от друга. Существенную роль при этом играет случайная погрешность.

В основе теории случайных ошибок лежат два положения математической статистики, подтверждаемые опытом.

1) При большом числе измерений одинаковые по величине, но противоположные по знаку, случайные ошибки встречаются одинаково часто.
2) Большие по абсолютной величине погрешности встречаются реже, чем малые, т.е. вероятность появления погрешности уменьшается с ростом абсолютной величины случайной погрешности.

Из этих положений следует, что при суммировании случайные ошибки должны компенсировать друг друга. Степень компенсации должна возрастать при увеличении количества измерений. Поэтому наиболее близким к истинному значению X измеряемой величины является среднеарифметическое значение $\bar{x}$ из большого числа n отдельных измерений x_1,; x_2,...x_n.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3)$$

Так как на практике число измерений n не может быть бесконечно большим, то средний результат $\bar{x}$ всегда содержит случайную ошибку $\Delta x = |x - \bar{x}|$.Однако при $n \to \infty$ $\Delta x \to 0$,т.е. $\bar{x} \to X$.

Наиболее распространённый способ оценки величины случайной ошибки основан на вычислении среднеквадратичной ошибки совокупности n измерений.

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}\ , \qquad (4)$$

где $(x_i - \bar{x}) = \Delta x_i$ – абсолютная погрешность отдельного измерения. Среднеквадратическая ошибка $S_{\bar{x}}$ служит мерой рассеяния результатов отдельных измерений x_i около среднего значения $\bar{x}$.

Степень приближения среднего значения $\bar{x}$ к истинному значению X оценивается по абсолютной погрешности Δx окончательного результата измерений $\Delta x = |X - \bar{x}|$. Зная абсолютную погрешность Δx, можно указать, так называемый, доверительный интервал ($\bar{x}+\Delta x$; $\bar{x}-\Delta x$), в котором находится истинное значени искомой величины

$$\bar{x}-\Delta x \le X \le \bar{x}+\Delta x \qquad (5$$

Вероятность того, что значение искомой величины x попадёт в указанны интервал называется **д о в е р и т е л ь н о й в е р о я т н о с т ь ю Р**. Доверительная вероятность выражается либо в долях единицы, либо в процента: Например: если Р = 0,97, это значит, что 97% результатов измерений попадают указанный доверительный интервал.

Очевидно, что чем больше разброс экспериментальных данных, тем больц будет доверительный интервал для выбранной доверительной вероятности.

Ещё один фактор, влияющий на величину доверительного интервала – наде ность эксперимента , чем больше n- число измерений, тем более надёжный экспер мент, тем больше вероятность того, что истинное значение измеряемой величин находится в заданном интервале.

Случайную погрешность эксперимента в математической статистике (ГОС 8.207-76 «Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработк результатов наблюдений») определяют следующим образом:

$$\Delta x_{сл}=t_{p.n}\times S_{\bar{x}}, \qquad (6$$

где $t_{p.n}$- коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности Р количества измерений n, численные значения которого для различных значений Р n приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.

n	P		
	0.90	0.95	0.99
3	2.920	4.303	9.925
4	2.353	3.183	5.841
5	2.132	2.776	4.604
6	2.015	2.571	4.032
7	1.943	2.447	3.707
8	1.895	2.365	3.449
9	1.860	2.306	3.355
10	1.833	2.262	3.250

В рядовых физических экспериментах обычно выбирают Р=0.95.

Окончательно случайную составляющую погрешности прямого измерени определяют по формуле

$$\Delta x_{сл}= t_{p.n}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (7$$

2.2 Инструментальная погрешность (погрешность средства измерения)

Абсолютная погрешность средства измерения – разность между показаниями прибора и истинным значением измеряемой величины.

Для серийных средств измерений одной из основных характеристик точности является предел допускаемой основной погрешности – взятая по модулю максимальная погрешность средств измерений в нормальных условиях применения, при которой прибор может быть признан годным и допущен к применению. Кроме допускаемой основной погрешности существует предел допускаемой дополнительной погрешности, обусловленной влиянием внешних факторов на показания прибора.

Обобщенной характеристикой точности стрелочного прибора, учитывающей и основную и дополнительную погрешности, является класс точности средства измерения. Например, для вольтметров класс точности характеризует пределы допускаемой основной погрешности и допускаемых изменений показаний, вызываемых внешним магнитным полем и отклонением от нормальных значений температуры, частоты переменного тока и некоторых других величин. Предел допускаемой абсолютной основной погрешности стрелочных измерительных приборов определяется по формуле

$$\Delta_{\Pi} x = \frac{\gamma}{100} x_N , \qquad (8)$$

где γ - предел допускаемой приведённой основной погрешности (класс точности) прибора; x_N - предел измерения для данного прибора.

Класс точности, как правило, наносят на щитках или корпусах измерительных приборов.

В современной технике измерений широко распространены цифровые измерительные приборы, принцип работы которых основан на преобразовании измеряемой величины в электрический код, которой отражается на табло в цифровой форме. Это дает возможность повысить точность измерений, практически полностью устранить промах и ошибки считывания, автоматизировать измерительный процесс.

Цифровые измерительные приборы представляют собой сложные электронные устройства, поэтому при выполнении измерений необходимо строго руководствоваться соответствующими указаниями в описаниях лабораторных работ. Погрешности цифровых измерительных приборов даются в паспорте на каждого из них. Так, для электронных секундомеров, используемых при выполнении лабораторных работ по курсу механика, предел допускаемой абсолютной основной погрешности $\Delta_{п} x$ =2мс.

2.3 Учёт инструментальной погрешности при многократных и однократном измеренний

Пусть предел допускаемой инструментальной погрешности равен $\Delta_{п} x$. Тогда при многократных измерениях нужно пользоваться среднеквадратическим значением инструментальной погрешности с той же доверительной вероятностью P=0.95.

$$\Delta x_{си} = \frac{\Delta_п x}{\sqrt{3}} \tag{9}$$

Здесь $\Delta x_{си}$ – абсолютная погрешность средства измерения.

Если измерение удаётся провести лишь однократно, то в качестве инструментальной погрешности берут предел допускаемой инструментальной погрешности:

$$\Delta x_{си} = \Delta_п x \tag{10}$$

Для линейных средств измерения (штангенциркуль, микрометр, стрелочный секундомер) предел допустимой инструментальной погрешности принимают равным половине «цены» деления шкалы

$$\Delta_п x = 0.5\ C \tag{11}$$

Постоянные величины задаются с абсолютной погрешностью, равной половине единицы её наименьшего разряда. Например, если заданы $m = 532.4$ г и $g = 9.81$ м/с^2, то $\Delta m = \pm 0.05$ г и $\Delta g = 0.005$ м/с^2

2.4 Результирующая погрешность прямого измерения

Пусть мы определили $\Delta x_{сл}$ и $\Delta x_{си}$. Результирующая погрешность прямого измерения даётся формулой

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{сл})^2 + (\Delta x_{си})^2} \tag{12}$$

Результат прямого измерения при этом имеет вид $x = \bar{x} \pm \Delta x$, $P=0.95$. Это означает, что с доверительной вероятностью $P=0.95$ истинное значение X лежит в интервале

$$\bar{x} - \Delta x \le X \le \bar{x} + \Delta x \tag{13}$$

При этом возможны следующие ситуации:

1)$\Delta x >> \Delta x_{си}$. Тогда $\Delta x \approx \Delta x_{сл}$ (в этом случае для повышения точности эксперимента желательно увеличить число опытов, уменьшив тем самым случайную составляющую погрешности).

2)$\Delta x_{сл} << \Delta x_{си}$. Тогда $\Delta x \approx \Delta x_{си}$. В этом случае не имеет смысла увеличивать число измерений. Если требуется увеличить точность измерений, надо воспользоваться другим средством измерений или кардинально изменить методику измерений. Отметим, однако, что в нашем лабораторном практикуме, как правило, такие кардинальные изменения недостижимы.

2.5 Округление результата

Результат измерения должен включать указание погрешности измерения и доверительной вероятности измерения. При этом погрешность берётся с одной или двумя значащими цифрами (две значащие цифры необходимо сохранять, если первой цифрой, характеризующей значение погрешности, будет цифра 1 или 2). Результат измерения округляют по следующим правилам.

Правила округления:

1. Числовое значение результатов измерений должно оканчиваться цифрой того же порядка, что и числовое значение абсолютной погрешности.
2. При округлении, если первая отбрасываемая цифра больше или равна пяти, последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.
3. Если отбрасываемая цифра меньше цифры «пять», то последняя сохраняемая цифра остаётся без изменений.
4. При округлении целых чисел все цифры, отброшенные при округлении, заменяют множителем 10^m, где m – число отброшенных цифр. Например, при округлении до двух значащих цифр число 31127 примет вид 31×10^3.

3 Погрешность косвенного измерения

Косвенным измерением называют измерение, при котором искомое значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и другими величинами, определяемыми путём прямых измерений.

3.1 Расчёт погрешности косвенного измерения

Среднеквадратическая погрешность косвенного измерения рассчитывается по формуле, аналогичной формуле для погрешности прямого измерения:

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y_{x1})^2 + (\Delta y_{x2})^2 + \ldots} = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 \Delta x_1^{\,2} + \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 \Delta x_2^{\,2} + \ldots} \quad (14)$$

Формула (14) – наиболее общая. В данном лабораторном практикуме чаще будут встречаться более простые функциональные зависимости $y = f(x_1, x_2, \ldots)$. В этом случае удобнее пользоваться частными случаями формулы (15):

1. Если функциональная зависимость имеет вид $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$, то

$$\Delta y = \sqrt{a_1^{\,2}(\Delta x_1)^2 + a_2^{\,2}(\Delta x_2)^2 + \ldots} \quad (15)$$

2. Если функциональная зависимость имеет вид $y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots$.

$$\delta_y = \sqrt{\alpha_1^{\,2}(\delta_{x_1})^2 + \alpha_2^{\,2}(\delta_{x_2})^2 + \ldots} \quad (16)$$

3.3 Запись окончательного результата

Результат измерений должен включать указание погрешности измерения и доверительной вероятности измерения. Погрешность берётся с одной или двумя значащими цифрами; последняя значащая цифра результата должна совпадать по порядку с последней значащей цифрой погрешности.

Приведём примеры правильной записи результата измерений:

$$g = (9{,}81 \pm 0{,}05)\text{м/с}^2;\quad P = 0{,}95;$$
$$I = (3{,}84 \pm 0{,}12)\times 10^{-4}\text{кгм}^2;\quad P = 0{,}95.$$

3.4 Пример статистической обработки результатов измерений

Допустим, что в результате десяти измерений получено десять значений x_i измеряемой величины x. Предварительный анализ показал, что эти измерения не содержат грубых погрешностей. Будем считать, что систематические погрешности либо отсутствуют, либо учтены при первичной обработке результатов. Сведём результаты экспериментов в таблицу. Последняя строка таблицы использована для вычисления суммы значений x_k.

Таблица 3.1

Примерный вид таблицы для статистической обработки результатов эксперимента

I	x_i	$x_i - \bar{x}$
1	1,46	0,05
2	1,38	-0,03
3	1,44	0,03
4	1,41	0,00
5	1,42	0,01
6	1,39	-0,02
7	1,36	-0,05
8	1,45	0,04
9	1,42	0,01
10	1,38	-0,03
	14,11	

По формуле (3) найдём

$$\bar{x} = \frac{14{,}11}{10} \approx 141.$$

По формуле (4) найдём среднеквадратическое отклонение случайной погрешности

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0{,}99\times 10^{-2}}{10(10-1)}} \approx 0{,}104.$$

Пусть задана доверительная вероятность P=0,95. Из таблицы 2.1 найдём, что $t_{p,n}$=2,262. Из (7) определим

$$\Delta x_{сл} = 2{,}262\times 0{,}104 \approx 0{,}235$$

Предположим, что предел допускаемой погрешности средства измерения известен и равен $\Delta_п x$ =0,1. Тогда из (9) получим

$$\Delta x_{си} = 0,1/\sqrt{3} = 0,0578.$$

Подставляя $\Delta x_{си}$ и $\Delta x_{сл}$ в формулу (12), найдём результирующую погрешность прямого измерения величины

$$\Delta x = \sqrt{0,235^2 + 0,0578^2} \approx 0,24.$$

Окончательный результат имеет вид

$$X = 1,41 \pm 0,24; \quad P = 0,95$$

Содержание

ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ.
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания по обработке данных лабораторных работ в курсе " Физика"

Кулешина С.В., Мельников В.П.,

Редактор Халдеева Г.П.
Компьютерная верстка Мун Е.

Подписано в печать Формат 60x90 $\frac{1}{16}$
Усл.печ.л. 0,6 Тираж 50 экз.

Издатель ВФ МЭИ (ТУ), 404110, г. Волжский, пр.Ленина, 69
Отпечатано ВФ МЭИ (ТУ), 404110, г. Волжский, пр. Ленина, 69