

В.Г. Кульков

**КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ ЭНЕРГЕТИКОВ**

МЕХАНИКА

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА**

ВОЛЖСКИЙ 2008

В пособии излагается материал, относящийся к первой части трехсеместрового курса физики, предназначенного для студентов энергетических специальностей. Рассматриваются такие разделы физики как механика и молекулярная физика. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям "Теплоэнергетика" и "Электроэнергетика".

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1 МЕХАНИКА	
§1. Кинематика	
1.1 Механика. Механическое движение.....	7
1.2 Характеристики движения материальной точки.....	8
1.3 Движение точки по окружности.....	9
§2. Динамика поступательного движения	
2.1 Основные законы динамики материальной точки.....	11
2.2 Виды сил в механике.....	13
2.3 Закон изменения импульса механической системы.....	16
2.4 Движение тела переменной массы.....	17
§3. Динамика вращательного движения	
3.1 Динамика движения материальной точки по окружности.....	18
3.2 Динамика твердого тела, вращающегося вокруг оси.....	19
3.3 Момент инерции твердого тела.....	20
§4. Механическая работа и энергия	
4.1 Механическая работа.....	22
4.2 Кинетическая энергия.....	23
4.3 Потенциальная энергия.....	24
§5. Законы сохранения	
5.1 Законы сохранения в механике.....	26
5.2 Соударение тел.....	27
5.3 Движение в неинерциальных системах отсчета.....	28
5.4 Силы инерции.....	30
§6. Колебания и волны	
6.1 Колебания. Колебательные системы.....	31
6.2 Маятники.....	32
6.3 Свободные механические колебания.....	33
6.4 Сложение колебаний.....	35
6.5 Характеристики затухания.....	36
6.6 Энергия колебаний.....	37
6.7 Вынужденные колебания.....	37
6.8 Механический резонанс.....	38
6.9 Автоколебания.....	38
6.10 Упругие волны.....	39
6.11 Звук.....	41
6.12 Вибрации и шумы энергетических установок.....	42

§7. Элементы механики жидкости и газа	
7.1 Движение жидкости и газа.....	44
7.2 Уравнение Бернулли.....	44
§8. Элементы теории относительности	
8.1 Принцип относительности Галилея.....	45
8.2 Постулаты специальной теории относительности.....	46
8.3 Преобразования Лоренца.....	47
8.4 Основной закон релятивистской динамики.....	49
8.5 Взаимосвязь массы и энергии.....	49
Часть 2 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	
И ТЕРМОДИНАМИКА	
§ 9. Молекулярная теория	
9.1. Основы и содержание молекулярно кинетической теории.....	51
9.2 Термодинамическая система. Термодинамический процесс.....	52
9.3 Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа.....	53
9.4 Давление газа на стенку.....	54
9.5 Средняя энергия молекул.....	56
9.6 Распределение Максвелла молекул газа по скоростям.....	57
9.7 Тепловые скорости молекул.....	60
9.8 Барометрическая формула. Распределение Больцмана.....	61
§10. Термодинамика	
10.1 Первый закон термодинамики.....	63
10.2 Теплоемкость.....	64
10.3 Основные изопроцессы в идеальном газе.....	65
10.4 Обратимые и необратимые процессы.....	67
10.5 Энтропия.....	68
10.6 Циклические процессы. Теорема Карно.....	69
10.7 Цикл паросиловой установки.....	70
10.8 Второй закон термодинамики.....	72
10.9 Третий закон термодинамики.....	73
10.10 Термодинамические потенциалы.....	73
10.11 Межмолекулярное взаимодействие. Уравнение состояния реальных газов.....	75
10.12 Изотермы реального газа.....	77
10.13 Диаграмма состояния. Тройная точка.....	79
10.14 Фазовые переходы первого рода.....	79
10.15 Фазовые переходы второго рода.....	80
§ 11 Конденсированное состояние	
11.1 Строение жидкости.....	82
11.2 Смачивание. Капиллярные явления.....	83
11.3 Симметрия кристаллов.....	84
11.4 Аморфные твердые тела.....	85
11.5 Дефекты кристаллического строения.....	86

11.6 Дислокации.....	87
11.7 Влияние дислокаций на физические свойства кристаллов.....	87
11.8 Поликристаллические материалы.....	88
11.9 Дефектообразование в металлах и сплавах, используемых в атомной энергетике.....	89
11.10 Роль дефектов в сплавах с особыми свойствами для турбин и паросиловых установок.....	90
§ 12 Физическая кинетика	
12.1 Неравновесные процессы.....	91
12.2 Основные уравнения явлений переноса.....	92
12.3 Кинетические коэффициенты.....	93

§1. Кинематика

1.1 Механика. Механическое движение

Механика – раздел физики, изучающий механическое движение.

Механическое движение – изменение взаимного положения тел в пространстве с течением времени.

Основными разделами механики являются кинематика и динамика. Кинематика описывает механическое движение, не рассматривая его причины. В ней устанавливаются соотношения между величинами, описывающими движение, и классифицируют его виды. В динамике рассматривают влияние взаимодействия тел и воздействия силовых полей на характеристики их механического движения. Важным подразделом динамики является статика, изучающая состояние покоя тел, испытывающих воздействие со стороны других тел и силовых полей.

Реальные механические движения тел изучаются при помощи моделей. Под моделью понимается некоторое упрощенное описание реального объекта, которое достаточно для того, чтобы понять интересующее явление. Модели оперируют некоторыми идеализированными понятиями. Определим некоторые из них.

Материальной точкой называется тело, форма и размеры которого несущественны в данной задаче, т. е. ими можно пренебречь по сравнению с другими размерами, фигурирующими в данной задаче.

Абсолютно твердым называется тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается неизменным.

Абсолютно упругим называется тело, если его деформации пропорциональны вызывающим их силам. После прекращения внешнего воздействия такое тело полностью восстанавливает размеры и форму.

Абсолютно неупругим называется тело, которое после прекращения внешнего воздействия полностью сохраняет деформированное состояние.

Телом отсчета называется тело, по отношению к которому рассматривается движение.

Системой отсчета называется совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов.

Любое сложное движение твердого тела можно представить как совокупность двух простейших его видов: поступательного и вращательного вокруг оси, в общем случае изменяющей свое положение в пространстве.

Поступательным называется движение тела, при котором любой от-

резок прямой, соединяющий две фиксированные точки тела в процессе движения остается параллельным себе.

Вращательным называется движение тела, при котором все его точки движутся по окружностям с центрами, лежащими на одной прямой. Эта прямая называется осью вращения.

1.2 Характеристики движения материальной точки

Положение материальной точки в пространстве можно задавать ее радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из начала координат в материальную точку. В декартовой системе координат радиус-вектор имеет компоненты x, y, z . Траекторией называется линия, описываемая радиусом-вектором точки при ее движении. В общем случае траекторией является кривая, плоская или пространственно искривленная.

Соприкасающейся плоскостью P в точке M называется предельное положение плоскости, проходящей через три точки кривой – M, M', M'' , при стремлении расстояний между ними к нулю. Прямая MC , нормальная к малому участку траектории, лежащая в плоскости P , называется нормалью. Прямая MB , проходящая перпендикулярно к плоскости P , называется бинормалью. Предельное положение прямой AM , проходящей через точки M' и M'' и лежащей в плоскости P , называется касательной (рис 1.1).

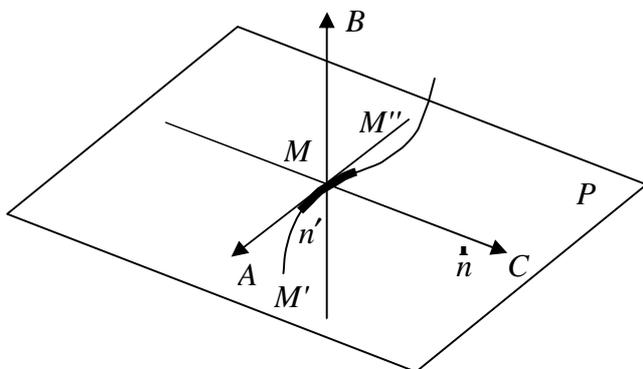


Рис. 1.1

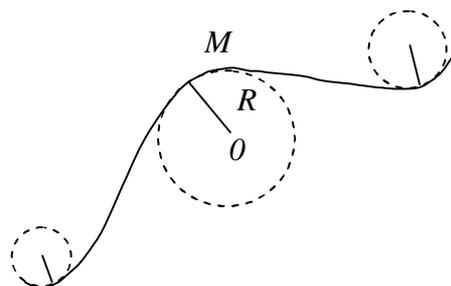


Рис. 1.2

Движение материальной точки по произвольной кривой в течение малого интервала Δt можно представить как движение по элементу дуги некоторой окружности с центром в точке O , лежащей в соприкасающейся плоскости (рис 1.2). Радиус R такой окружности называется радиусом кривизны траектории в точке M , а обратная величина R^{-1} – кривизной траектории в точке M . В процессе движения материальной точки положение центра окружности O , а вместе с ним радиус и кривизна траектории изменяются.

Законом движения называется задание способа нахождения радиусавектора материальной точки в каждый момент времени.

Например, такое задание можно осуществить в виде таблицы, в которой в качестве столбцов используются моменты времени t_i и значения соответствующих координат x_i, y_i, z_i . Другой способ заключается в графическом изображении этих величин. Однако более удобным является аналитиче-

ское задание закона движения. При этом определяется векторная функция $\dot{\mathbf{r}}(t)$, которая эквивалентна трем скалярным функциям $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Первая определяет радиус-вектор в зависимости от времени, последние выражают временную зависимость координат.

Скоростью материальной точки называется производная ее радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории. Его компоненты

равны: $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$, $v_y = \frac{dy(t)}{dt}$, $v_z = \frac{dz(t)}{dt}$.

Ускорением материальной точки называется производная ее скорости по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.2)$$

Компоненты вектора ускорения равны $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$. Прямолинейным называется движение материальной точки в случае, когда ее траекторией является прямая. Можно рассмотреть два простейших случая прямолинейного движения.

1) Равномерное движение. Для проекции ускорения вдоль прямой, а также скорости можно записать соотношения:

$$a = 0; v = const; x = x_0 + vt. \quad (1.3)$$

2) Равнопеременное (равноускоренное) движение. Аналогичные соотношения имеют вид:

$$a = const; v = v_0 + at; x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}; x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (1.4)$$

1.3 Движение точки по окружности

Для однозначного определения положения точки, движущейся по окружности, в данный момент времени можно указать угол поворота φ ее радиус-вектора $\dot{\mathbf{r}}$ относительно начального положения (рис. 1.3). При таком движении модуль радиуса-вектора не изменяется. Элементарный поворот $d\dot{\varphi}$ считается вектором. Его направление определяется направлением движения точки по окружности правилом правого винта. Конечный поворот на угол φ не является вектором, для него не выполняются законы векторного сложения.

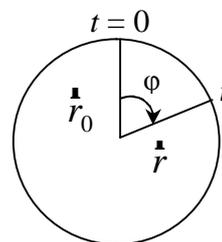


Рис. 1.3

Угловой скоростью материальной точки называется производная угла поворота по времени

$$\mathbf{\dot{\omega}} = \frac{d\mathbf{\dot{\phi}}}{dt}. \quad (1.5)$$

Угловым ускорением называется производная угловой скорости материальной точки по времени

$$\mathbf{\ddot{\alpha}} = \frac{d\mathbf{\dot{\omega}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{\dot{\phi}}}{dt^2}. \quad (1.6)$$

Угловые скорость и ускорение являются векторами. Их направления параллельны оси вращения

Рассмотрим простейшие виды движения материальной точки по окружности:

1) Равномерное движение. Для проекций на ось вращения имеем:

$$\alpha = 0; \quad \omega = const; \quad \phi = \omega t. \quad (1.7)$$

2) Равноускоренное движение. Аналогичные соотношения имеют вид:

$$\alpha = const; \quad \omega = \omega_0 + \alpha t; \quad \phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}; \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}. \quad (1.8)$$

За время Δt радиус-вектор движущейся по окружности точки поворачивается на угол $\Delta\phi$, при этом длина дуги окружности, проходимой точкой равна $\Delta l = \Delta\phi r$. Разделим это соотношение на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$. Полученное выражение для скорости точек запишем в векторном виде:

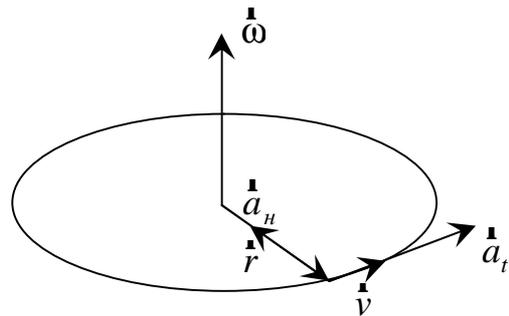


Рис. 1.4

$$\mathbf{v} = [\dot{\omega} \mathbf{r}]; \quad v = \omega r. \quad (1.9)$$

Взяв производную по времени от (1.9), получим выражение для ускорения точки:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \dot{\omega}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \dot{\omega} \right] + \left[\mathbf{r} \frac{d\dot{\omega}}{dt} \right] = [\dot{\alpha} \mathbf{r}] + [\dot{\omega} \mathbf{v}]. \quad (1.10)$$

Первое слагаемое справа в (1.10) называется тангенциальным (касательным) ускорением:

$$\mathbf{a}_t = [\dot{\alpha} \mathbf{r}]. \quad (1.11)$$

Его появление обусловлено изменением со временем угловой скорости, а значит с учетом (1.9) и зависимостью v от времени. Вектор \mathbf{a}_t лежит на касательной к траектории.

тельной к окружности и сонаправлен с \dot{v} , если скорость возрастает, или противоположен \dot{v} , если она убывает (рис. 1.4). Второе слагаемое справа в (1.10) называется нормальным (центростремительным) ускорением:

$$\dot{a}_n = [\dot{\omega} v]. \quad (1.12)$$

Используя (1.9), получаем:

$$\mathbf{r} \dot{a}_n = [\dot{\omega} [\mathbf{r} \mathbf{r}]] = \dot{\omega} (\mathbf{r} \mathbf{r}) - \mathbf{r} \omega^2 = -\mathbf{r} \omega^2 \quad (1.13)$$

Вектор \dot{a}_n согласно (1.13) направлен от движущейся точки к центру окружности. Используя (1.9), для величины a_n можно получить выражения:

$$a_n = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} \quad (1.14)$$

Поскольку направления векторов \dot{a}_n и \dot{a}_t взаимно перпендикулярны, для величины полного ускорения справедливо выражение:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1.15)$$

§2. Динамика поступательного движения

2.1 Основные законы динамики материальной точки

Основные законы динамики материальной точки были сформулированы Ньютоном и явились обобщением большого количества экспериментальных данных.

Первый закон Ньютона (закон инерции). Существуют системы отсчета, относительно которых материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока на нее не действуют силы.

Свойство тел сохранять первоначальное состояние своего движения называется инерцией. Первый закон Ньютона устанавливает возможность существования определенного класса систем отсчета, в которых он выполняется – инерциальных систем отсчета. Любая другая система отсчета, которая движется относительно инерциальной с постоянной скоростью, также является инерциальной. Реально выбираемые системы отсчета в практических задачах в большинстве случаев не являются инерциальными в строгом смысле. Например, системы, связанные с Землей, отклоняются по свойствам от инерциальных вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси и годового вращения вокруг Солнца. Однако такую систему можно считать инерциальной при решении многих задач с достаточной степенью точности. Наиболее близкой по свойствам к инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета, центр которой совпадает с центром масс солнечной системы, а оси направлены на три определенные звезды.

Силой называется количественная мера взаимодействия тел.

Масса – мера инертности тел.

Результат действия силы на материальную точку определяется ее массой. При этом воздействии изменяется состояние движения тела в инерциальной системе отсчета.

Второй закон Ньютона. Ускорение, приобретаемое материальной точкой, пропорционально действующей на нее силе. Коэффициентом пропорциональности между ними является масса:

$$\dot{\mathbf{F}} = m \dot{\mathbf{a}}. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) называют основным уравнением динамики поступательного движения.

Импульсом тела называется произведение массы тела на его скорость:

$$\dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.17)$$

В классической механике (ньютоновской) масса тела считается величиной инвариантной, независимой от выбора системы отсчета, т. е., независимой от скорости тела. В этом приближении $m \dot{\mathbf{a}} = m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt}$. Тогда наряду

с (1.16) второй закон Ньютона можно записать в виде:

$$\frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}} \quad (1.18)$$

Изменение импульса тела за конечный отрезок времени:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{F}} dt. \quad (1.19)$$

Здесь стоящий справа интеграл называется импульсом силы.

Величина вектора силы, стоящая в выражениях (1.16) и (1.19) в общем случае зависит от координат данной материальной точки и других, с которыми она взаимодействует, а также от времени. Одно векторное уравнение эквивалентно трем уравнениям для проекций. Записав с учетом (1.2) и решив дифференциальные уравнения (1.16) для одной материальной точки или системы таких точек можно найти состояние движения их в произвольный момент времени. В процессе интегрирования уравнения необходимо задавать значения произвольных констант. Ими могут являться значения координат и скоростей в начальный момент времени. Таким образом, уравнения Ньютона обладают способностью описывать поведение системы во времени, предсказать ее состояние в произвольный момент времени в будущем. Такая возможность называется детерминизмом.

Третий закон Ньютона. Две материальные точки взаимодействуют между собой с силами одной физической природы, равными по величине, противоположными по направлению и лежащими на одной прямой.

Этот закон называют законом равенства действия и противодействия.

2.2 Виды сил в механике

В природе существуют три вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электрослабое и сильное (ядерное). Второй из них включает электромагнитное взаимодействие, благодаря которому, в частности, осуществляется взаимодействие между атомами или молекулами тел. Эти взаимодействия приводят к появлению таких макроскопических сил, рассматриваемых в механике, как силы упругости, силы трения. Рассмотрим выражения для сил, используемых при решении механических задач.

1) Силы гравитационного взаимодействия (всемирного тяготения):

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1.20)$$

Эти силы проявляются в виде притяжения тел с массами m_1 и m_2 , взаимно удаленными на расстояние r . Коэффициент $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ называется постоянной тяготения или гравитационной постоянной.

2) Силы электрического взаимодействия зарядов:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.21)$$

Здесь q_1 и q_2 – заряды материальных точек, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная. Взаимодействие проявляется в виде притяжения и отталкивания материальных точек в зависимости от знаков их зарядов.

3) Силы тяжести. В условиях физических задач вблизи поверхности Земли вместо выражения (1.20) для гравитационного взаимодействия можно использовать выражение для силы тяжести, действующей со стороны Земли на тело массой m :

$$F = mg. \quad (1.22)$$

Здесь $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение земного притяжения.

4) Упругие силы, возникающие при деформации тел. Среди различных видов деформаций мы рассмотрим только два.

а) Простое растяжение. Возьмем стержень постоянного сечения из однородного материала и подействуем на него растягивающей силой F . В этих условиях длина стержня изменится. Удлинение стержня (абсолютная деформация) равна:

$$F = k\Delta l, \quad (1.23)$$

где k – коэффициент жесткости. Выражение (1.23) можно представить в другой форме:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.24)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ относительная деформация, равная отношению абсолютной

деформации Δl к исходной длине стержня l_0 ; $\sigma = F/S$ – напряжение; S – площадь поперечного сечения стержня, E – модуль Юнга, зависящий от материала, из которого изготовлен стержень. Формулы (1.23) и (1.24) выражают закон Гука для упругих деформаций, который устанавливает линейную зависимость величины деформации от приложенной нагрузки.

б) Простой сдвиг. Подействуем на верхнюю грань куба касательным напряжением σ (рис 1.5), считая нижнюю грань закрепленной. Куб деформируется в призму. В качестве относительной деформации удобно взять величину $\varepsilon = a/b = \text{tg}\Theta$. Для малых деформаций $\Theta \ll 1$ имеем $e = \Theta$. Закон Гука для такой деформации имеет вид:

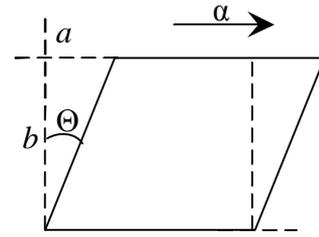


Рис. 1.5

$$\sigma = G\varepsilon = G\Theta \quad (1.25)$$

где G – модуль сдвига. Деформации сдвига могут возникать только в твердых телах.

5) Силы трения. При взаимном движении двух контактирующих тел между ними возникают силы, препятствующие этому движению. Такие силы называются силами трения. Они приводят к рассеиванию механической энергии и переходу ее в тепловую энергию (диссипации), поэтому силы трения являются диссипативными.

Различают следующие силы трения:

- Сила сухого трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также при попытке вызвать такое скольжение. В последнем случае тела взаимно не смещаются, и она называется силой трения покоя. Поскольку тела в этом случае остаются в покое, сила трения покоя равна внешней силе, действующей на тело. При превышении внешней силой определенной величины (максимальной силы трения покоя) тело приходит в движение. Для величины силы трения скольжения справедлив закон Амонтона:

$$F_{mp} = \mu N, \quad (1.26)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы контактирующих тел и состояния их поверхностей, N – сила реакции (см. дальше), действующая на движущееся тело со стороны поверхности, по которой происходит движение. Зависимость силы трения скольжения от скорости имеет вид, представленный на рис. 1.6. При некоторой скорости скольжения имеется слабый минимум на графике $F_{mp}(v)$.

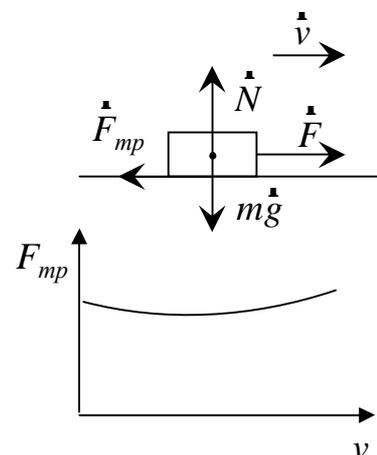


Рис. 1.6

Возникновение силы сухого трения объясняется следующими причинами. При контакте поверхностей тел микроскопические неровности приводят к зацеплениям, преодоление которых требует дополнительных усилий. Микронеровности могут разрушаться, что в конечном счете приводит к изнашиванию трущихся поверхностей. Кроме этого при тесном контакте микровыступов возникают межмолекулярные силы притяжения частиц обоих соприкасающихся тел. Если тела химически разнородные, то такие выступы приобретают электрические заряды противоположных знаков, которые приводят к появлению силы их взаимного притяжения. Для уменьшения трения скольжения используют смазку, переводя силу сухого трения в значительной мере в силу вязкого трения.

• Силы вязкого трения (сопротивления среды) возникают при движении тел в жидкости или газе. Их особенностью является то, что они возникают только при движении тела. В отсутствии турбулентности вязкая сила трения пропорциональна скорости тела с коэффициентом, зависящим от формы и размеров тела, и пропорциональным коэффициенту вязкости среды. Для шара радиусом r , движущегося со скоростью v в среде с коэффициентом динамической вязкости η , сила сопротивления находится по формуле Стокса:

$$F = 6\pi r\eta v. \quad (1.27)$$

Появление турбулентных вихрей при движении тела определяется значением числа Рейнольдса $Re = \frac{lv\rho}{\eta}$, где l – размер тела, v – его скорость, ρ – плотность жидкости. Для каждой формы тела можно экспериментально определить критическое значение числа Рейнольдса, при котором появляется турбулентность. При появлении турбулентности сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости тела, а при приближении последней к скорости звука – ее кубу. При сверхзвуковых скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

Коэффициент вязкости находят из опыта с использованием закона Ньютона для вязкого трения при скольжении двух поверхностей, пространство между которыми заполнено определенной жидкостью или газом (рис 1.7):

$$F = \eta S \frac{v}{h}, \quad (1.28)$$

где S – площадь поверхностей тел 1 и 2, h – толщина слоя жидкости между ними. Распределение скоростей слоев жидкости между движущимися поверхностями показано на рис. 1.7.

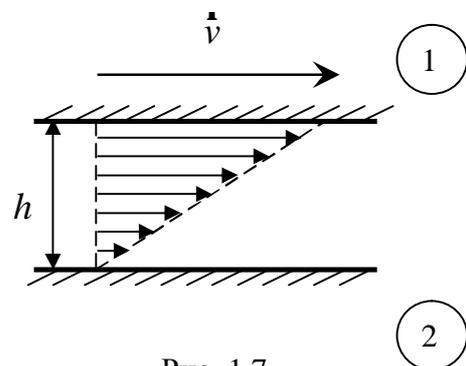


Рис. 1.7

Размерность коэффициента вязкости в системе СИ Па·с (в СГС – Пуаз; 1П = 0,1 Па·с). Величина $\varphi = \eta^{-1}$ называется текучестью. Наряду с ди-

намической, часто рассматривают кинематическую вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, где ρ – плотность жидкости. Кинематическая вязкость измеряется в системе СИ в $\text{м}^2/\text{с}$ (в СГС – в Стоксах, $1\text{Ст} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$).

Особыми вязкостными свойствами обладает жидкий гелий. При температуре 2,172 К он переходит в сверхтекучее состояние, в котором вязкость равна нулю.

• Сила трения качения возникает, например, при качении цилиндра по горизонтальной поверхности, когда на ось в горизонтальном направлении действует сила, движущая цилиндр. Сила трения качения определяется соотношением Кулона:

$$F_{\text{кач}} = S_f \frac{F_N}{R}, \quad (1.29)$$

где S_f – коэффициент трения качения (измеряемый в единицах длины), F_N – значение нормальной прижимающей цилиндра силы, R – радиус цилиндра. Трение качения в основном обусловлено деформациями цилиндра и плоскости в области их контакта.

Тело называется свободным, если на его перемещения не наложено никаких ограничений. В большинстве задач тело нельзя считать свободным, т. к. на его движение наложены определенные ограничения, называемые связями. Все силы, действующие на тело, можно разделить на два типа: активные силы и реакции связей. При составлении уравнений движения учитываются все эти силы, а траектории движения обычно диктуются имеющимися связями.

2.3 Закон изменения импульса механической системы

Рассмотрим механическую систему из n материальных точек. Для произвольной i -й точки уравнение (1.18) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \dot{\mathbf{F}}_i. \quad (1.30)$$

Материальные точки или тела, составляющие систему, называются внутренними, остальные (не входящие в систему) – внешними. На каждую i -ю точку системы действуют как внешние силы $\dot{\mathbf{F}}_i^e$ со стороны внешних тел, так и внутренние $\dot{\mathbf{F}}_{ik}$ со стороны других k точек системы.

$$\dot{\mathbf{F}}_i = \dot{\mathbf{F}}_i^e + \sum_k \dot{\mathbf{F}}_{ik}. \quad (1.31)$$

Подставляем (1.31) в (1.30) и суммируем по всем i точкам системы:

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i^e + \sum_{i,k \neq i} \dot{\mathbf{F}}_{ik}$$

Первое слагаемое справа $\dot{\mathbf{F}}^e = \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i^e$ представляет сумму всех внешних сил и называется главным вектором внешних сил. Согласно третьему закону Ньютона последняя сумма справа равна нулю. Величина $\dot{\mathbf{P}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i$ представляет полный импульс системы. Тогда:

$$\frac{d\dot{\mathbf{P}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}}^e. \quad (1.32)$$

Центром масс системы материальных точек называется точка C , радиус-вектор которой определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i; \\ x_c &= \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i; \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i; \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Если начало координат выбрано в точке C , то

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.34)$$

В случае непрерывного распределения массы вместо формул (1.33) необходимо использовать следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho dV; \\ x_c &= m^{-1} \int_V x \rho dV; \quad y_c = m^{-1} \int_V y \rho dV; \quad z_c = m^{-1} \int_V z \rho dV, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $\rho dV = dm$, а интегрирование проводится по объему распределенной массы. Скорость и ускорение центра масс можно найти, продифференцировав (1.33) по времени:

$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{a}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{a}_i. \quad (1.36)$$

Сравнивая (1.36) с (1.32), получаем:

$$\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{F}}^e}{m}. \quad (1.37)$$

Таким образом, центр масс движется как материальная точка с массой, равной суммарной массе системы, на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил.

2.4 Движение тела переменной массы

Рассмотрим движение тела, если его масса изменяется. Такой случай соответствует, например, движению тела в пылевом облаке, когда частицы

пыли прилипают к телу; или тело, двигаясь, выбрасывает часть своей массы. Начальные массы и скорость тела обозначим m и \dot{v} , добавочная масса dm имеет скорость \dot{v}_1 . Начальный импульс такой системы $m\dot{v} + dm\dot{v}_1$, конечный – $(m + dm)(\dot{v} + d\dot{v})$. Изменение импульса: $d\dot{p} = (m + dm)(\dot{v} + d\dot{v}) - m\dot{v} - \dot{v}_1 dm$. Раскроем скобки, пренебрегая малой величиной второго порядка $dmd\dot{v}$, и разделим все на dt . С учетом (1.32) получим: $\frac{d\dot{p}}{dt} = \dot{F}^e = \frac{m d\dot{v}}{dt} - \dot{u} \frac{dm}{dt}$, что эквивалентно:

$$m \frac{d\dot{v}}{dt} = \dot{F}^e + \dot{u} \frac{dm}{dt} \quad (1.38)$$

где $\dot{u} = \dot{v}_1 - \dot{v}$ – скорость dm относительно m .

Уравнение (1.38) называется уравнением Мещерского для движения тела с переменной массой. Второе слагаемое в нем возникает вследствие изменения со временем массы тела и называется реактивной силой.

Рассмотрим движение ракеты с реактивным двигателем в пространстве вне действия внешних сил, в том числе и тяготения. Ось x направлена вдоль скорости ракеты \dot{v} . Скорость реактивной струи направлена против оси x . Уравнение (1.38) для $\dot{F}^e = 0$ в проекции на ось x принимает вид: $m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$, что эквивалентно $u \frac{dm}{m} = -dv$. Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим $u \ln m = -v + const$. Пусть в начале движения скорость $v = 0$, а масса равнялась m_0 . Подставив эти значения в решение, найдем значение константы интегрирования: $const = u \ln m_0$. Тогда окончательно получим:

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (1.39)$$

Эта формула принадлежит Циолковскому и позволяет находить скорость ракеты с реактивным двигателем в зависимости от ее оставшейся массы.

§3. Динамика вращательного движения

3.1 Динамика движения материальной точки по окружности

Моментом силы \dot{F} относительно точки O называется величина

$$\dot{M} = [\dot{r} \dot{F}], \quad (1.40)$$

где \dot{r} – вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы. Величина момента (рис. 1.8) равна $M = Fr \sin \alpha = Fl$, где l называется плечом силы. Плечо равно расстоянию от точки O до линии действия силы.

Моментом импульса \dot{L} материальной точки относительно точки O называется величина

$$\dot{\mathbf{L}} = \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{p}} \end{matrix} \right], \quad (1.41)$$

где $\dot{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор материальной точки относительно O , а $\dot{\mathbf{p}}$ – импульс точки.

Найдем производную по времени от выражения (1.41): $\frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{p}} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} d\dot{\mathbf{r}} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & d\dot{\mathbf{p}} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & d\dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{p}} \end{matrix} \right]$, но $\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m}$, а $\frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}}$ (см. (1.18)). Тогда

$$\frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{F}} \end{matrix} \right] = \dot{\mathbf{M}}. \quad (1.42)$$

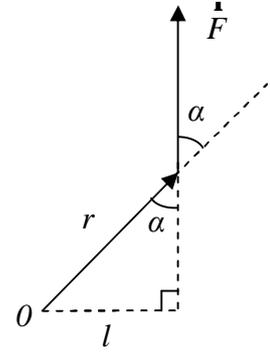


Рис. 1.8

Моментом импульса или силы относительно оси называется проекция соответствующего момента относительно точки, лежащей на оси, на эту ось. Моменты относительно оси не зависят от положения указанной точки на этой оси.

Пусть материальная точка m движется по окружности радиуса r . Момент импульса относительно ее центра $\dot{\mathbf{L}} = \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{p}} \end{matrix} \right] = m \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\mathbf{v}} \end{matrix} \right] = m \left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\omega} \mathbf{r} \end{matrix} \right]$. Здесь учтено соотношение (1.9). Раскрывая двойное векторное произведение, найдем: $\left[\begin{matrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & \dot{\omega} \mathbf{r} \end{matrix} \right] = \dot{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\dot{\omega} \mathbf{r}) = r^2 \dot{\omega}$, так как $\dot{\omega}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ взаимно перпендикулярны. Тогда $\dot{\mathbf{L}} = mr^2 \dot{\omega}$. Величина $I = mr^2$ называется моментом инерции точки M относительно центра окружности. Тогда окончательно получаем:

$$\dot{\mathbf{L}} = I \dot{\omega}. \quad (1.43)$$

При неизменных массе и радиусе окружности величина I постоянна. Возьмем производную по времени от (1.43) с учетом (1.42) и (1.6), получим:

$$\frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = I \frac{d\dot{\omega}}{dt} = I \dot{\alpha}; \quad \frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = \dot{\mathbf{M}} \quad \dot{\mathbf{M}} = I \dot{\alpha}. \quad (1.44)$$

Уравнения (1.44) аналогичны уравнениям второго закона Ньютона (1.18) и являются уравнениями динамики движения материальной точки по окружности. Отметим, что при таком движении моменты импульса и силы относительно центра окружности и оси, проходящей через него нормально плоскости окружности, равны по модулю.

3.2 Динамика твердого тела, вращающегося вокруг оси

Твердое тело можно представить в виде совокупности материальных точек, расстояние между которыми не изменяется. Рассмотрим две точки с радиусами-векторами $\dot{\mathbf{r}}_i$ и $\dot{\mathbf{r}}_k$. Внутренние силы, действующие между этими точками $\dot{\mathbf{F}}_{ik}$ и $\dot{\mathbf{F}}_{ki}$ не создают результирующего момента. Действительно $\left[\begin{matrix} \mathbf{r}_i & \dot{\mathbf{F}}_{ik} \\ \dot{\mathbf{r}}_i & \dot{\mathbf{F}}_{ik} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \mathbf{r}_k & \dot{\mathbf{F}}_{ki} \\ \dot{\mathbf{r}}_k & \dot{\mathbf{F}}_{ki} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \mathbf{r}_i & \dot{\mathbf{F}}_{ik} \\ \dot{\mathbf{r}}_i & \dot{\mathbf{F}}_{ik} \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \mathbf{r}_k & \dot{\mathbf{F}}_{ik} \\ \dot{\mathbf{r}}_k & \dot{\mathbf{F}}_{ik} \end{matrix} \right] = \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \dot{\mathbf{F}}_{ik} \right] = 0$. Здесь учтен третий закон

Ньютона, а также то, что сила взаимодействия точек \dot{F}_{ik} направлена параллельно вектору, их соединяющему ($\dot{r}_i - \dot{r}_k$). Поэтому изменение момента импульса твердого тела может происходить только под действием внешних сил \dot{F}_i^e . Их суммарный момент $\sum_i [\dot{r}_i \dot{F}_i^e] = \dot{M}^e$ называется *главным моментом внешних сил*. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки движутся по окружностям, лежащим в параллельных плоскостях с центрами, лежащими на этой оси. Момент импульса тела, как совокупности материальных точек можно представить в виде $\dot{L} = \sum \dot{L}_i = \sum m_i r_i^2 \dot{\omega}$. Величина $\sum m_i r_i^2$ называется моментом инерции тела. Его можно найти, разбивая твердое тело на малые фрагменты и считая каждый из них материальной точкой. В пределе получаем формулу для расчета момента инерции в континуальном приближении:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \quad (1.45)$$

Тогда

$$L = I \dot{\omega}. \quad (1.46)$$

Учитывая вышеизложенное и связь (1.44) для точек, движущихся по окружностям, можно записать для твердого тела:

$$\frac{d\dot{L}}{dt} = \dot{M}^e, \quad \dot{M}^e = I \dot{\alpha} \quad (1.47)$$

Уравнения (1.47) представляют две формы записи основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

3.3 Момент инерции твердого тела

Выберем в твердом теле две параллельные оси, одна из которых проходит через центр масс C , а другая – через точку A и удалена от нее на расстояние d (рис. 1.9).

Согласно рисунку:

$$r^2 = r_0^2 + d^2 - 2dr_0 \cos \varphi.$$

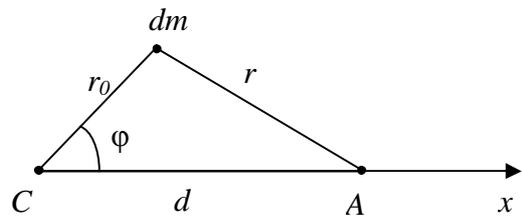


Рис. 1.9

Тогда $\int r^2 dm = \int r_0^2 dm + d^2 \int dm - 2d \int r_0 \cos \varphi dm$. Учтем, что $\int dm = m$, $\int r_0 \cos \varphi dm = \int x dm = x_c m = 0$. Последнее равенство записано на основании (1.33). Тогда $\int r^2 dm = \int r_0^2 dm + d^2 m$. Это равенство означает, что

$$I_A = I_C + d^2 m. \quad (1.48)$$

Выражение (1.48) составляет содержание теоремы Гюйгенса-Штейнера. Момент инерции I_A тела относительно произвольной оси A равен сумме моментов инерции I_C тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела C и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

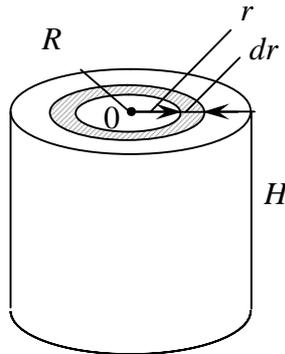


Рис. 1.10

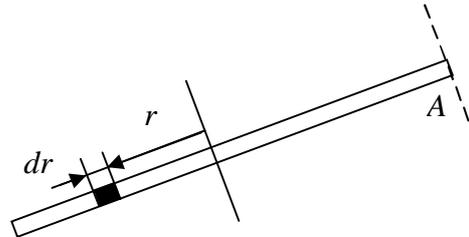


Рис. 1.11

Найдем момент инерции сплошного цилиндра высоты H , радиуса R и массы m (рис. 1.10) относительно его оси. Сначала найдем момент инерции dI выделенного цилиндрического слоя радиусом r и толщины dr :

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho 2\pi r H dr$$

Полный момент инерции найдем, вычислив интеграл:

$$I = \int_0^R 2\pi \rho H r^3 dr = \frac{\pi \rho H R^4}{2}.$$

Но $m = \pi R^2 H \rho$ – полная масса цилиндра, тогда окончательно находим момент инерции цилиндра:

$$I = \frac{mR^2}{2} \tag{1.49}$$

В качестве второго примера найдем момент инерции стержня длины l , сечения S , массы m относительно оси, нормальной к стержню, проходящей через его середину (рис. 1.11). Поступая аналогично, имеем:

$$dI = r^2 dm = S \rho r^2 dr,$$

$$I = 2 \int_0^{l/2} S \rho r^2 dr = \frac{S \rho l^3}{12}.$$

Но $m = S \rho l$ – масса стержня, тогда момент инерции стержня равен

$$I = \frac{ml^2}{12}. \tag{1.50}$$

Используя теорему Гюйгенса-Штейнера, найдем момент инерции стержня

относительно оси, проходящей через конечную точку стержня, нормально к нему:

$$I_A = I_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3}. \quad (1.51)$$

Приведем выражения для моментов инерции некоторых тел.

- Сплошной шар относительно его геометрической оси:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (1.52)$$

- Плоская прямоугольная пластина размером $a \times b$ произвольной толщины относительно оси, проходящей через точку пересечения диагоналей перпендикулярно к плоскости пластины:

$$I = \frac{m}{12} (a^2 + b^2). \quad (1.53)$$

- Конус произвольного радиуса R , относительно его оси:

$$I = \frac{3}{10} mR^2. \quad (1.54)$$

- Тонкостенная сфера радиуса R относительно диаметра:

$$I = \frac{2}{3} mR^2. \quad (1.55)$$

- Боковая поверхность тонкостенного конуса относительно его оси:

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \quad (1.56)$$

§4. Механическая работа и энергия

4.1 Механическая работа

Работой силы \mathbf{F} при перемещении $d\mathbf{r}$ называется величина

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (1.57)$$

Справа в (1.57) записано скалярное произведение векторов. Учтем, что $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, тогда $\delta A = \mathbf{F} \mathbf{v} dt$.

Мощностью называется работа, совершенная за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}. \quad (1.58)$$

Полезную работу при конечном перемещении точки вдоль линии L можно записать в виде $A = \int_L \mathbf{F} d\mathbf{r}$.

Потенциальными (консервативными) называются силы, работа которых определяется только положением начальной и конечной точек траектории. Полную работу при перемещении материальной точки из начального положения 1 в конечное положение 2 по пути a или b (рис. 1.12) обозначим A_{1a2} и A_{1b2} .

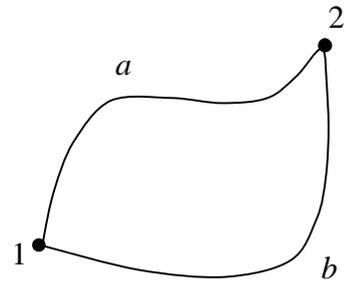


Рис. 1.12

Согласно определению потенциальных сил $A_{1a2} = A_{1b2}$. Но если изменить направление движения по траектории, то изменится и знак работы. $A_{1a2} = -A_{2b1}$ или $A_{1a2} + A_{2b1} = 0$. Слева записана полная работа на замкнутом пути $1a2b1$, т. е. по контуру L . Это означает, что работа потенциальных сил на замкнутом пути равна нулю. Представляя работу в интегральном виде, имеем:

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0. \quad (1.59)$$

Непотенциальными силами являются гироскопические и диссипативные силы. Первые из них всегда направлены нормально к вектору скорости. Поэтому их работа всегда равна нулю. Формально понятие потенциальных сил (1.59) выполнено в этом случае, однако гироскопические силы к потенциальным не относятся. Диссипативные силы зависят от вектора скорости. К ним относятся все силы трения. Направление таких сил противоположно направлению вектора скорости, поэтому их работа всегда отрицательна. Величина таких сил либо слабо зависит от величины скорости, либо представляется ее степенной функцией.

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся по одинаковым траекториям. Поэтому можно рассматривать только траекторию одной точки, например центра масс C . В этом случае $\delta A = \mathbf{F}^e d\mathbf{r}_C$, где \mathbf{F}^e – главный вектор внешних сил.

4.2 Кинетическая энергия.

Универсальной количественной мерой различных форм движения тел и их взаимодействия является энергия. Различают такие виды энергии как механическую, внутреннюю, ядерную и т. д.

Изменение состояния движения в инерциальной системе отсчета осуществляется за счет действия силы. Поэтому энергия механического движения системы изменяется под действием силы, так что ее изменение равно работе этой силы. Энергия механического движения называется кинетической.

$dW_\kappa = \mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \mathbf{v} dt$, но $\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$, тогда $dW_\kappa = \frac{\mathbf{p}}{m} d\mathbf{p}$. В этом соотношении значки вектора можно опустить, так как $d(\mathbf{v}^2) = 2\mathbf{v} d\mathbf{v} = d(v^2) = 2v dv$. Тогда $dW_\kappa = \frac{1}{m} p dp$. Интегрируя это уравнение и принимая кинетическую энергию

состояния покоя равной нулю, получаем:

$$W_{\kappa} = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.60)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек имеет вид:

$$W_{\kappa} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (1.61)$$

Величина кинетической энергии зависит от выбора системы отсчета. Найдем взаимосвязь кинетических энергий системы материальных точек в двух различных системах отсчета. Пусть система K' движется относительно K со скоростью \dot{V} . Соотношение между скоростями точки в неподвижной системе K и в подвижной K' имеет вид: $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}'_i + \dot{V}$. Подставляем это соотношение в (1.61) с учетом того, что $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{p}'$:

$$W_{\kappa} = \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2} + \dot{V} \dot{p}' + \frac{V^2}{2} \sum_i m_i = W_{\kappa}' + \dot{V} \dot{p}' + \frac{mV^2}{2}. \quad (1.62)$$

Если в качестве системы K' выбрать систему центра масс, то $\dot{p}' = 0$. Тогда (1.62) принимает вид:

$$W_{\kappa} = W_{\kappa}' + \frac{mV^2}{2} \quad (1.63)$$

Это соотношение выражает теорему Кёнига. *Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме её кинетической энергии в системе центра масс и половины произведения ее массы на квадрат относительной скорости системы.*

4.3 Потенциальная энергия.

Рассмотрим систему материальных точек, в которой действуют только потенциальные силы. Поскольку работа таких сил определяется лишь начальным и конечным положениями точек, т. е. начальной и конечной конфигурациями системы, то эту работу можно представить в виде разности некоторых функций этой конфигурации:

$$A = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2}. \quad (1.64)$$

Функция W_{Π} имеет размерность работы и называется потенциальной энергией системы. Работа совершается за счет убыли потенциальной энергии. Как видно из (1.64), W_{Π} определена с точностью до произвольной постоянной. Значение последней определяется выбором начала отсчета энергии, т. е. выбором определенной конфигурации системы, которой соответствует энергия $W_{\Pi} = 0$.

Элементарную работу при перемещении $d\dot{\mathbf{r}}$ материальной точки под

действием потенциальной силы $\dot{\mathbf{F}}$ можно представить как:

$$\delta A = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{r} = -dW_{\Pi}. \quad (1.65)$$

Потенциальная энергия может быть функцией координат. Если система не находится во внешнем нестационарном поле, то W_{Π} не зависит явно от времени. В этом случае:

$$dW_{\Pi} = \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} dy + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} dz. \quad (1.66)$$

Сравнивая две последние формулы с учетом представления скалярного произведения векторов в координатной форме получаем: $F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} dx - \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} dy - \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} dz$, откуда

$$\dot{\mathbf{F}} = -grad W_{\Pi}. \quad (1.67)$$

Здесь *grad* обозначает вектор, координатами которого являются частные производные функции $W_{\Pi}(x, y, z)$.

Приведем выражения для потенциальной энергии в различных случаях.

1) Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух точечных масс m_1 и m_2 , разделенных расстоянием r :

$$W_{\Pi}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad W_{\Pi}(\infty) = 0. \quad (1.68)$$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

2) Потенциальная энергия в поле тяжести вблизи поверхности Земли:

$$W_{\Pi}(h) = mgh, \quad W_{\Pi}(0) = 0. \quad (1.69)$$

3) Потенциальная энергия упруго деформированной пружины жесткости k :

$$W_{\Pi}(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad W_{\Pi}(0) = 0. \quad (1.70)$$

В заключение параграфа отметим следующее. Изменение кинетической энергии системы материальных точек определяется работой всех сил, как потенциальных, так и непотенциальных: $dW_K = \delta A + \delta A'$. С учетом (1.65) получим:

$$dW_K + dW_{\Pi} = \delta A' \quad (1.71)$$

Здесь $\delta A'$ – элементарная работа непотенциальных (диссипативных) сил. Сумма справа в (1.71) – изменение полной механической энергии системы.

$$W = W_K + W_{\Pi} \quad (1.72)$$

Если внешние поля, действующие на систему, нестационарны, т. е. их дейст-

вие явно зависит от времени, то в (1.71) справа необходимо добавить слагаемое, учитывающее эту зависимость: $\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t} dt$. В этом случае система не является консервативной.

§5. Законы сохранения

5.1 Законы сохранения в механике.

Замкнутой называется система тел, на которую не действуют внешние силы.

Консервативной называется система тел, в которой отсутствуют диссипативные силы, а внешние потенциальные поля, действующие на систему, не зависят явно от времени.

Определенные функции координат и скоростей материальных точек, которые не изменяют своего значения с течением времени, называются интегралами движения.

Наиболее важными в механике интегралами движения являются полная механическая энергия, полный импульс и полный момент импульса системы. Можно сформулировать условия, при которых имеют место соответствующие законы сохранения.

1) Закон сохранения импульса. *Полный импульс замкнутой механической системы не изменяется со временем:*

$$\sum_i \mathbf{p}_i = const. \quad (1.73)$$

Это утверждение можно получить из закона изменения импульса системы (1.32). Закон сохранения импульса справедлив и для незамкнутых систем, если главный вектор внешних сил равен нулю. Если нулю равна только одна из компонент главного вектора внешних сил, то сохраняется соответствующая компонента импульса.

Все законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени. В частности, закон сохранения импульса вытекает из однородности пространства, т. е. независимости свойств пространства от выбора начала отсчета системы координат. Это означает, что перенос всей системы тел на постоянный вектор не изменяет ее свойств.

2) Закон сохранения момента импульса. *Полный момент импульса замкнутой механической системы не изменяется со временем:*

$$\sum_i \dot{L}_i = const. \quad (1.74)$$

Это утверждение можно получить из закона изменения момента импульса (1.47). Закон сохранения момента импульса справедлив и для незамкнутых систем, если главный вектор внешнего момента сил равен нулю. Если нулю равна проекция главного момента внешних сил на какую-либо ось, то сохраняющейся является соответствующая проекция момента импульса.

Закон сохранения момента импульса обусловлен изотропностью пространства. Последнее свойство означает одинаковость свойств пространства во всех направлениях. Иначе говоря, поворот системы координат в пространстве на произвольный угол не изменяет его свойств.

3) Закон сохранения энергии. Полная механическая энергия консервативной системы не изменяется со временем:

$$W = const. \quad (1.75)$$

Здесь под W понимается сумма кинетической энергии, потенциальной энергии взаимодействия тел системы и энергии системы во внешнем консервативном поле. В частном случае можно сформулировать закон сохранения энергии так. Полная механическая энергия замкнутой системы тел не изменяется со временем. Здесь под энергией понимается сумма кинетической и потенциальной энергии взаимодействия тел. Во всех случаях диссипативные силы не должны действовать в системе.

Закон сохранения механической энергии следует из однородности времени. Это свойство означает, что физические свойства системы не изменяются при изменении начала отсчета времени.

5.2 Соударение тел.

Ударом называется кратковременное взаимодействие двух или большего числа тел, после которого резко изменяются их скорости.

Линией удара называется прямая, нормальная к общей касательной плоскости тел, проведенная через точку касания. Если скорости тел параллельны этой линии, то удар называется *прямым*, иначе – *косым*. Если скорости центров масс тел лежат на линии удара, то удар называется *центральной*. Реальный удар всегда является неупругим. При этом происходит некоторая пластическая деформация соударяющихся тел, поэтому часть механической энергии переходит во внутреннюю. В процессе удара силы взаимодействия достигают очень большой величины, поэтому действием остальных внешних сил на тела за короткое время удара можно пренебречь и считать систему соударяющихся тел квазизамкнутой. Различают два предельных идеализированных случая реального удара.

1) Абсолютно неупругий удар. До удара тела движутся со скоростями \dot{v}_1 и \dot{v}_2 . После удара тела соединяются и движутся как единое тело со скоростью \dot{u} . Из закона сохранения импульса:

$$m_1 \dot{v}_1 + m_2 \dot{v}_2 = (m_1 + m_2) \dot{u}. \quad (1.76)$$

Общая кинетическая энергия после удара становится меньше, так как часть ее переходит в энергию пластической деформации.

2) Абсолютно упругий удар. Рассмотрим прямой центральный удар двух тел. Закон сохранения импульса запишем в проекции на линию удара:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ m_1 (v_1 - u_1) &= m_2 (u_2 - v_2), \end{aligned} \quad (1.77)$$

где u_1 и u_2 – скорости тел после удара. Поскольку удар абсолютно упругий, остаточной деформации нет, можно записать закон сохранения энергии:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$$

или

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2). \quad (1.78)$$

Разделив (1.78) на (1.77) найдем $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$, что совместно с (1.77) дает:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ u_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Выражения (1.79) позволяют найти значения скоростей тел после удара. Рассмотрим один частный случай удара двух тел одинаковой массы $m_1 = m_2 = m$. Выражения (1.79) в этом случае дают $u_1 = v_2$ и $u_2 = v_1$, т. е. после удара тела обмениваются скоростями.

5.3 Движение в неинерциальных системах отсчета.

Выберем две системы отсчета S_1 и S . Первая из них имеет центр O' и является инерциальной, будем называть ее неподвижной, вторая система движется относительно первой совершенно произвольно и является неинерциальной (рис. 1.13).

Обозначим $\dot{\mathbf{R}}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ – радиус-векторы точки M в системах S_1 и S соответственно, $\dot{\mathbf{R}}_0$ – радиус-вектор начала системы S (точка O) в системе S_1 . Запишем соотношение между этими векторами и их производными по времени:

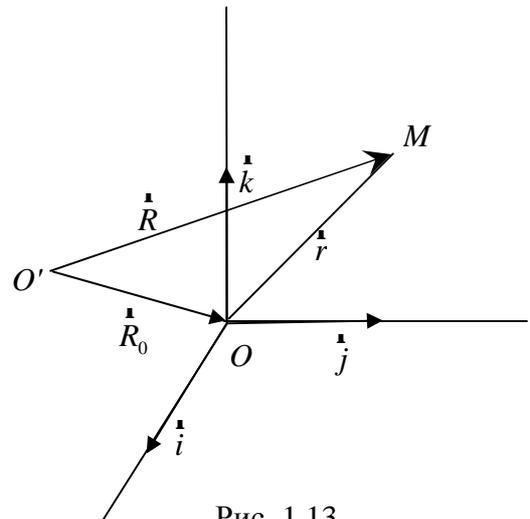


Рис. 1.13

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Производные по времени обозначены точками над буквами. В неподвижной системе второй закон Ньютона имеет вид:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (1.81)$$

где $\overset{\mathbf{r}}{a}_{abc} = \overset{\mathbf{K}}{R}$ ускорение точки в этой системе. Найдем уравнение движения точки в системе S . Для этого найдем выражение для $\overset{\mathbf{a}}{a}_{abc}$. При этом будем учитывать, что орты $\overset{\mathbf{i}}{i}$, $\overset{\mathbf{j}}{j}$, $\overset{\mathbf{k}}{k}$ в общем случае поворачиваются в пространстве с мгновенной угловой скоростью $\overset{\mathbf{\omega}}{\omega}$, а все движение системы S можно рассматривать как совокупность ее поступательного движения и мгновенного вращения относительно оси, проходящей через начало O . Поскольку при вращении системы S модули векторов $\overset{\mathbf{i}}{i}$, $\overset{\mathbf{j}}{j}$, $\overset{\mathbf{k}}{k}$ не изменяются, то для их производных по времени можно записать выражения аналогичные (1.9):

$$\overset{\mathbf{K}}{\dot{i}} = [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{i}], \quad \overset{\mathbf{K}}{\dot{j}} = [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{j}], \quad \overset{\mathbf{K}}{\dot{k}} = [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{k}]. \quad (1.82)$$

Во втором уравнении (1.80) найдем $\overset{\mathbf{K}}{r}$, считая $\overset{\mathbf{r}}{r} = xi + yj + zk$.

$$\begin{aligned} \overset{\mathbf{K}}{r} &= \overset{\mathbf{r}}{\dot{x}}i + \overset{\mathbf{r}}{\dot{y}}j + \overset{\mathbf{r}}{\dot{z}}k + x\overset{\mathbf{K}}{\dot{i}} + y\overset{\mathbf{K}}{\dot{j}} + z\overset{\mathbf{K}}{\dot{k}} = \overset{\mathbf{r}}{v}_{отн} + x[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{i}] + y[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{j}] + z[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{k}] = \\ &= \overset{\mathbf{r}}{v}_{отн} + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} (xi + yj + zk)] = \overset{\mathbf{r}}{v}_{отн} + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{r}] \end{aligned} \quad (1.83)$$

Кроме того, $\overset{\mathbf{K}}{R} = \overset{\mathbf{r}}{v}_{abc}$, $\overset{\mathbf{K}}{R}_0 = \overset{\mathbf{r}}{v}_0$. Тогда:

$$\overset{\mathbf{i}}{v}_{abc} = \overset{\mathbf{i}}{v}_{отн} + \overset{\mathbf{i}}{v}_{пер}. \quad (1.84)$$

$$\overset{\mathbf{i}}{v}_{пер} = \overset{\mathbf{i}}{v}_0 + [\overset{\mathbf{i}}{\omega} \overset{\mathbf{i}}{r}]. \quad (1.85)$$

Здесь $\overset{\mathbf{i}}{v}_{abc}$ – скорость точки в системе S_1 , называется абсолютной, $\overset{\mathbf{r}}{v}_{отн} = \overset{\mathbf{i}}{\dot{x}}i + \overset{\mathbf{i}}{\dot{y}}j + \overset{\mathbf{i}}{\dot{z}}k$ – скорость точки по отношению к наблюдателю в системе S называется относительной, $\overset{\mathbf{i}}{v}_{пер}$ – скорость системы S называется переносной. Согласно (1.85) она, как указывалось выше, состоит из скорости $\overset{\mathbf{i}}{v}_0$ поступательного движения системы S (движения ее центра O) и вращательного движения ее относительно центра O .

Продифференцируем (1.84): $\overset{\mathbf{r}}{a}_{abc} = \overset{\mathbf{K}}{a}_{abc} = \overset{\mathbf{K}}{a}_{отн} + \overset{\mathbf{K}}{a}_0 + [\overset{\mathbf{K}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{r}] + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{K}}{r}]$. Найдем: $\overset{\mathbf{K}}{a}_{отн} = \frac{d}{dt}(\overset{\mathbf{r}}{\dot{x}}i + \overset{\mathbf{r}}{\dot{y}}j + \overset{\mathbf{r}}{\dot{z}}k) = (\overset{\mathbf{r}}{\ddot{x}}i + \overset{\mathbf{r}}{\ddot{y}}j + \overset{\mathbf{r}}{\ddot{z}}k) + (\overset{\mathbf{K}}{\dot{x}}i + \overset{\mathbf{K}}{\dot{y}}j + \overset{\mathbf{K}}{\dot{z}}k) = \overset{\mathbf{r}}{a}_{отн} + (\overset{\mathbf{r}}{\dot{x}}[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{i}] + \overset{\mathbf{r}}{\dot{y}}[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{j}] + \overset{\mathbf{r}}{\dot{z}}[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{k}]) = \overset{\mathbf{r}}{a}_{отн} + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{v}_{отн}]$. Далее, используя (1.83): $[\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{K}}{r}] = [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{v}_{отн}] + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{r}]]$.

Тогда:

$$\overset{\mathbf{a}}{a}_{abc} = \overset{\mathbf{a}}{a}_{отн} + \overset{\mathbf{a}}{a}_к + \overset{\mathbf{a}}{a}_{пер}. \quad (1.86)$$

Здесь $\overset{\mathbf{r}}{a}_{abc} = \overset{\mathbf{K}}{R} = \overset{\mathbf{K}}{v}_{abc}$ – абсолютное ускорение точки M в системе S_1 , $\overset{\mathbf{r}}{a}_{отн} = \overset{\mathbf{r}}{\ddot{x}}i + \overset{\mathbf{r}}{\ddot{y}}j + \overset{\mathbf{r}}{\ddot{z}}k$ – относительное ускорение точки M относительно системы S , второе слагаемое в (1.86) $a_к = 2[\overset{\mathbf{i}}{\omega} \overset{\mathbf{i}}{v}_{отн}]$ – кориолисово ускорение. Выражение (1.86) составляет содержание теоремы Кориолиса. Наконец, $\overset{\mathbf{r}}{a}_{пер} = \overset{\mathbf{r}}{a}_0 + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{r}] + [\overset{\mathbf{r}}{\omega} [\overset{\mathbf{r}}{\omega} \overset{\mathbf{r}}{r}]]$ – переносное ускорение системы S относительно S_1 . Здесь первое слагаемое – поступательное ускорение, второе слагаемое – ус-

корение, связанное с неравномерным вращением системы S относительно точки O , третье слагаемое после раскрытия двойного векторного произведения равно $-\omega^2 \mathbf{r}$ – центростремительное ускорение, связанное с вращением системы S .

5.4 Силы инерции.

Умножим (1.86) на массу m материальной точки M :

$$m \mathbf{a}_{abc} = m \mathbf{a}_{отн} + m \mathbf{a}_к + m \mathbf{a}_{пер}. \quad (1.87)$$

Учтем (1.81) и запишем (1.87) для движения в системе S , где ускорение обозначено как $\mathbf{a}_{отн}$:

$$m \mathbf{a}_{отн} = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_к - m \mathbf{a}_{пер}. \quad (1.88)$$

Это уравнение представляет собой закон движения в неинерциальной системе S . В отличие от записи (1.81) второго закона Ньютона в инерциальной системе здесь справа кроме силы \mathbf{F} , действующей на точки со стороны других тел системы, стоят два слагаемых $-m \mathbf{a}_к$ и $-m \mathbf{a}_{пер}$. Они называются кориолисовой и переносной силами инерции.

$$\bar{\mathbf{F}}_к = -m \mathbf{a}_к = -2m [\mathbf{\omega} \mathbf{v}_{отн}]. \quad (1.89)$$

$$\mathbf{F}_{пер} = -m \mathbf{v}_0 - m [\mathbf{\omega} \mathbf{r}] + m \omega^2 \mathbf{r} \quad (1.90)$$

Первое слагаемое в (1.90) связано с ускорением системы S при поступательном движении и называется поступательной силой инерции. Второе слагаемое в (1.90) выражает силу инерции, возникающую при неравномерном вращении системы S , и не имеет специального названия. Третье слагаемое – сила инерции, связанная с вращением системы S , называется центробежной силой инерции. Все силы инерции направлены в обратную сторону по отношению к соответствующему ускорению.

С поступательной силой инерции мы сталкиваемся, сидя в вагоне ускоряющегося или останавливающегося трамвая. С центробежной силой инерции мы имеем дело, когда трамвай движется по закруженному участку рельсов или при движении на карусели.

В отличие от обычных сил \mathbf{F} , силы инерции не обусловлены взаимодействием тел, а появляются только вследствие выбора неинерциальной системы. Поэтому для них не выполняется третий закон Ньютона. Силы инерции, таким образом, для тел, движущихся в неинерциальной системе отсчета, являются внешними. Поэтому такие системы нельзя считать замкнутыми. В них не выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.

§6. Колебания и волны

6.1 Колебания. Колебательные системы.

Колебаниями называются процессы, повторяющиеся во времени. По типу процессов и описывающих их физических величин различают механические колебания, электромеханические, электромагнитные и др.

Система, способная совершать колебательные процессы, называется *колебательной системой* или *осциллятором*. Если осциллятор совершает колебательные движения только под действием внутренних сил, то такие колебания называются *свободными*. Если же осциллятор подвергается действию внешних периодических сил, то колебания называются *вынужденными*. Колебания, строго повторяющиеся через определенный интервал времени, называются *периодическими*.

Периодом T называется *длительность одного полного цикла колебаний*.

Частотой называется *количество колебаний, совершенных за единицу времени $\nu = 1/T$* . Величина $\omega = 2\pi\nu$ называется *циклической частотой колебаний*.

Среди различных типов периодических процессов наибольшее значение имеют гармонические колебания. Гармоническими называют колебания, совершающиеся в зависимости от времени по закону синуса или косинуса:

$$\begin{aligned}x &= x_m \sin(\omega t + \varphi_0) \\x &= x_m \cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}\quad (1.91)$$

Амплитудой колебания называется *наибольшее отклонение колеблющейся величины от равновесного значения*. В формулах (1.91) амплитуда обозначена x_m .

Размахом колебаний называется *весь интервал изменения физической величины*. На рис. 1.14 показан график зависимости гармонически колеблющейся величины x от времени t .

Согласно рис. 1.14 размах колебаний равен удвоенной амплитуде $2x_m$.

Изучение гармонических колебаний является необходимым по следующим причинам. Во-первых, такие колебания описываются простыми функциями. Во-вторых, многие колебательные явления в природе и технике происходят по гармоническим законам. В-третьих, любой периодический процесс, негармоническое

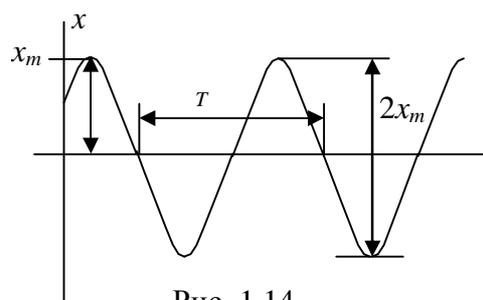


Рис. 1.14

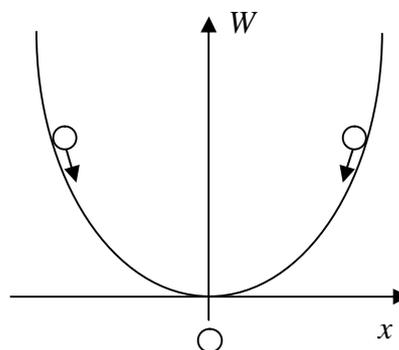


Рис. 1.15

колебание, можно представить в виде суперпозиций гармонических с частотами ω , 2ω , 3ω и т. д. Такое представление называют разложением в спектр. Соответствующий раздел математики называется гармоническим анализом, а соответствующие суммы – рядами Фурье.

Фазой называется величина, описывающая состояние колебательной системы в данный момент времени. В случае гармонических колебаний фазой является аргумент тригонометрической функции. Значение фазы линейно возрастает со временем. Начальное значение фазы соответствует началу отсчета времени $t = 0$ и в выражениях (1.91) обозначено как φ_0 .

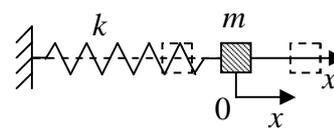
6.2 Маятники

Для возникновения в системе колебаний, необходимо, чтобы при отклонении ее от положения равновесия возникли силы, возвращающие ее к этому положению. При всяком таком отклонении потенциальная энергия должна возрастать по сравнению с положением равновесия, где потенциальная энергия имеет минимум (рис. 1.15). Механическая система, в которой возникают колебания координат, называется маятником. Различают следующие типы маятников.

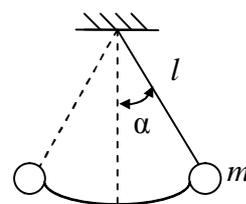
1) Пружинный (упругий) маятник (рис. 1.16а). Представляет собой точечную массу m , прикрепленную к упруго деформируемой пружине жесткости k , другой конец которой жестко закреплен. При деформации пружины возникают упругие возвращающие силы, действующие на массу. Положение равновесия точечная масса проходит по инерции. В процессе колебаний потенциальная энергия деформации пружины периодически переходит в кинетическую энергию поступательного движения.

2) Математический маятник (рис. 1.16б). Представляет собой точечную массу, подвешенную к невесомой нерастяжимой нити длиной l . Система находится в поле тяжести. В процессе колебаний потенциальная энергия в поле тяжести поочередно переходит в кинетическую энергию поступательного движения.

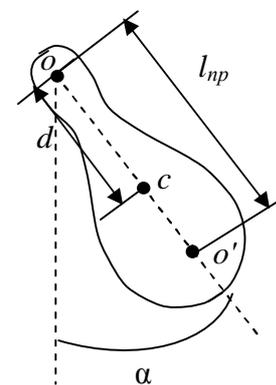
3) Физический маятник (рис. 1.16в). Представляет собой произвольное тело, подвешенное в поле тяжести так, что центр масс C находится ниже точки подвеса O . Превращения энергии те же, что и в п. 2



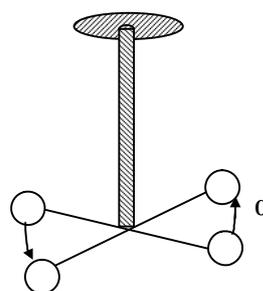
а



б



в



г

Рис. 1.16

4) Крутильный маятник (рис. 1.16г). Представляет собой физическое тело, прикрепленное в центре масс к стержню, способному испытывать упругую деформацию кручения. Энергия упругой деформации закрученного вокруг своей оси стержня поочередно переходит в кинетическую энергию вращательного движения тела.

Многие механические системы при отклонении их от положения равновесия ведут себя подобно маятникам. Например, жидкость в двух сообщающихся сосудах (рис. 1.17) способна совершать колебания, если создать в некоторый момент разность уровней в сосудах. Их изучение совершенно аналогично рассмотрению колебаний маятников.

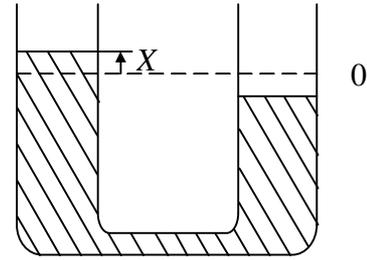


Рис. 1.17

6.3 Свободные механические колебания.

Колебания любого маятника математически подобны. Поэтому рассмотрим их на примере упругого маятника. На тело массы m действуют силы: упругая $-kx$ и сила сопротивления среды $-bv$. Тогда второй закон

Ньютона можно записать в виде: $ma = -kx - bv$. Учитывая, что $a = \frac{d^2x}{dt^2}$,

$v = \frac{dx}{dt}$, это уравнение после деления на m можно переписать в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.92)$$

где $2\beta = \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Уравнение (1.92) является дифференциальным и описывает в общем случае затухающие свободные колебания. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1.93)$$

Рассмотрим два возможных случая соотношения параметров ω_0 и β .

1) $\beta \geq \omega_0$ Корни уравнения (1.93) – действительные числа $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Решением уравнения (1.92) является функция:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}. \quad (1.94)$$

Константы A и B определяются из начальных ус-

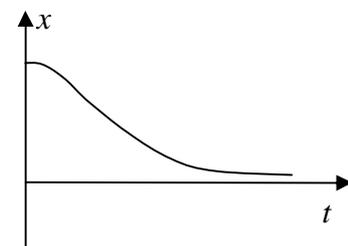


Рис. 1.18

ловий $x(0) = x_0$, $dx(0)/dt = v_0$. Функция (1.94) описывает аperiodический процесс – релаксацию положения тела к равновесию. График процесса зависит от начальных условий и имеет вид, например, такой как на рис. 1.18.

2) $\beta < \omega_0$ Корни характеристического уравнения комплексные $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Решение уравнения (1.92) можно представить в виде, подобном (1.94), но можно, воспользовавшись формулой Эйлера, перейти к тригонометрической форме:

$$x(t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) e^{-\beta t}, \quad (1.95)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Представив (1.95) как разложение косинуса суммы, можно записать решение в виде:

$$x(t) = x_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.96)$$

Здесь ω – частота затухающих колебаний, β – коэффициент затухания, φ_0 – начальная фаза. График $x(t)$ представлен на рис. 1.19. Строго говоря, процесс колебаний неperiodичен, но если $\beta \ll 1$, то его можно считать квазипериодическим. Тогда зависимость амплитуды от времени имеет вид $x_m(t) = x_m e^{-\beta t}$ (пунктирная линия на рис. 1.19). Если считать $\beta = 0$, то сопротивление среды отсутствует и решение уравнения (1.92) принимает вид:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.97)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота собственных незатухающих колебаний маятника.

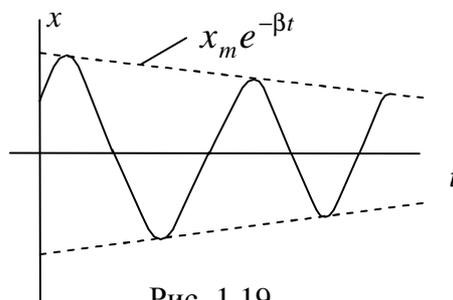


Рис. 1.19

Отсюда можно найти их период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.98)$$

Уравнения, аналогичные (1.92) можно получить и для других типов маятников. Выражения для периодов их незатухающих колебаний имеют вид.

- Физический маятник:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (1.99)$$

где J – момент инерции относительно подвеса, d – расстояние от центра масс до точки подвеса.

- Математический маятник:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.100)$$

где g – ускорение земного притяжения, l – длина нити.

- крутильный маятник:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}, \quad (1.101)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси стержня, на котором он укреплен, c – крутильная жесткость стержня ([момент силы] = $-c \times$ [угол кручения]).

Следует заметить, что при рассмотрении колебаний маятников ограничиваются их малой амплитудой, чтобы выполнялся закон Гука, а также соотношение $\sin \alpha \approx \alpha$.

6.4 Сложение колебаний.

Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующих колебаний в тех случаях, когда система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах.

Процесс простого незатухающего колебания удобно изображать при помощи векторной диаграммы (рис. 1.20). Координату x , являющуюся проекцией вращающегося с угловой скоростью ω вектора можно записать как $x = A \cos \varphi$, где A – длина вектора, $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ – угол его поворота. Зависимость $x(t)$ имеет вид гармонической функции: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

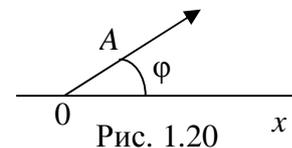


Рис. 1.20

Если рассматриваются два колебания с разными частотами ω_1 и ω_2 , то необходимо рассматривать векторную диаграмму, изображенную на рис. 1.21. Из рисунка видно, что результирующее колебание можно представить в виде:

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad (1.102)$$

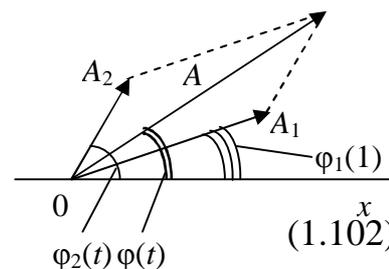


Рис. 1.21

где по теореме косинусов:

$$A(t) = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)))^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1(t) + A_2 \sin \varphi_2(t)}{A_1 \cos \varphi_1(t) + A_2 \cos \varphi_2(t)} \quad (1.103)$$

$$\varphi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1; \quad \varphi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$$

Если складываются колебания одной частоты, то формула (1.103) принимает вид:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.104)$$

где

$$A^2 = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1))^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (1.105)$$

В случае, когда частоты складываемых колебаний очень близки $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, возникает так называемый эффект биений.

Пусть $x_1(t) = A \cos(\omega t)$, $x_2(t) = A \cos(\omega + \Delta\omega)t$. Учитывая, что $\Delta\omega/\omega \ll 1$ после складывания получаем: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$,

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos \omega t. \quad (1.106)$$

Это колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда которого изменяется по периодическому закону $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t$. График таких колебаний представляет собой промодулированную синусоиду. Частота биений $\Delta\omega$ равна разности складываемых частот. Период биений $T = 2\pi/\Delta\omega$.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний различных частот траектории точки принимают причудливую форму. Они являются замкнутыми только если отношение частот равно рациональному числу. Получающиеся в этом случае траектории называют фигурами Лиссажу.

6.5 Характеристики затухания.

1. Коэффициент затухания β . Характеризует уменьшение амплитуды со временем. Время τ , в течение которого амплитуда уменьшается в e раз, называется временем релаксации. Отсюда $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, $\beta = \tau^{-1}$.

2. Декремент затухания Δ равен отношению двух последовательных амплитуд колебаний: $\Delta = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = e^{\beta T}$.

3. Логарифмический декремент затухания равен логарифму от декремента. $\delta = \ln \Delta = \ln \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \beta T$. С использованием времени релаксации τ его выражение имеет вид $\delta = \frac{T}{\tau}$.

4. Добротность колебательной системы характеризует степень малости затухания. $Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T}$. Пусть за время релаксации τ система совершает

N колебаний. Тогда $N = \frac{\tau}{T}$, $Q = \frac{\pi\tau}{T} = \pi N$.

6.6 Энергия колебаний.

В процессе колебаний происходит взаимное превращение различных видов энергии – потенциальной в кинетическую и наоборот. При максимальном отклонении маятника от положения равновесия его скорость и кинетическая энергия обращаются в нуль, а потенциальная энергия имеет максимальное значение $W_{\Pi} = \frac{kx_m^2}{2}$ для пружинного маятника. Проходя через положение равновесия, маятник имеет потенциальную энергию, равную нулю, и максимальную кинетическую энергию $W_K = \frac{mv_m^2}{2}$. Из закона сохранения энергии в случае незатухающих колебаний имеем:

$$\frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}. \quad (1.107)$$

В произвольный момент времени маятник обладает и кинетической, и потенциальной энергией. Взяв производную по времени от выражения (1.96), найдем скорость:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_m e^{-\beta t} (\beta \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0))$$

Полная энергия принимает вид:

$$\begin{aligned} W &= \frac{kx^2(t)}{2} + \frac{mv^2(t)}{2} = \\ &= \frac{mx_m^2}{2} e^{-2\beta t} [\omega_0^2 + \beta^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) + \beta\omega \sin(2\omega t + 2\varphi_0)] \end{aligned} \quad (1.108)$$

Если $\beta = 0$ (затуханий нет), то $W = \frac{mx_m^2}{2} = const$.

6.7 Вынужденные колебания.

Если на колебательную систему действует внешняя периодическая сила с частотой Ω , то справа в уравнении (1.92) имеется член $\frac{F_0}{m} \cos \Omega t$ и уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (1.109)$$

Общее решение этого уравнения равно сумме его частного решения x_1 и общего решения x_2 соответствующего однородного уравнения (1.92). Второе решение описывает затухающие колебания и по истечении достаточно большого интервала времени им можно пренебречь. Тогда в качестве решения (1.109) можно взять функцию:

$$x = x_m \cos(\Omega t + \varphi_1)$$

$$x_m = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.110)$$

6.8 Механический резонанс.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы при приближении циклической частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний системы называется резонансом. На рис. 1.22 представлены резонансные кривые для амплитуды смещения x_m маятника для различных значений коэффициента затухания β . Положение Ω_0 максимума на одной из таких кривых можно найти, взяв производную от x_m по частоте Ω . Соответствующее вычисление дает:

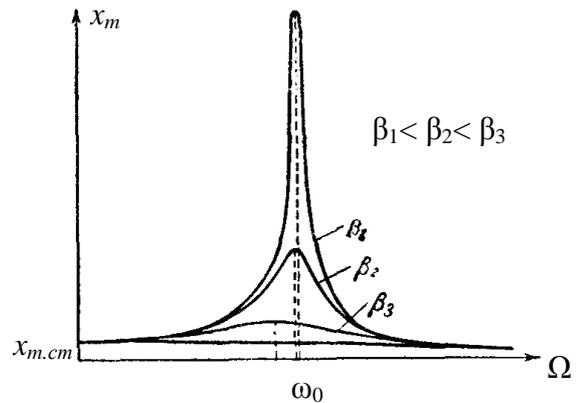


Рис. 1.22

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1.111)$$

При этом значение максимальной амплитуды равно:

$$x_{m0} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.112)$$

Явление резонанса широко используется в науке и технике, например, в акустике – для усиления звука, в радиотехнике – для настройки радиоприемных устройств. Иногда явления резонанса опасны: амплитуда колебаний становится так велика, что система может разрушиться. Известны случаи разрушения мостов, когда по ним проходило воинское подразделение «в ногу», чеканя шаг. Недостаточная центровка, изгиб вала могут создать вынужденные колебания с частотой, близкой к собственной, что приводит к поломке машин. При больших скоростях движения самолета под действием аэродинамических сил возникают колебания крыла самолета с нарастающей амплитудой, которые называют флаттер-колебаниями. Поэтому на стадии разработки конструкторы принимают специальные меры по нейтрализации этого эффекта.

6.9 Автоколебания.

Для поддержания незатухающих собственных колебаний в системе необходим источник энергии, который бы компенсировал потери при затухании. Колебательные системы, в которых предусмотрены специальные меха-

низмы поступления энергии из некоторого источника, называются автоколебательными.

Примером автоколебательной системы является часовой механизм. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний применяют специальные генераторы на лампах и транзисторах. В этих двух случаях энергия колебаний пополняется за счет энергии сжатой (заведенной) пружины или источника тока.

6.10 Упругие волны.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется волновым процессом или волной. При распространении волны частицы среды колеблются около своих положений равновесия, поэтому волна переносит энергию колебаний без переноса вещества. Упругие волны различаются поляризацией. Если колебания частицы среды происходят вдоль направления распространения волны, то она называется продольной. Если направление колебаний перпендикулярно скорости волны, то она называется поперечной.

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек пространства, колеблющихся в одной фазе.

Фронт волны называется наиболее удаленная от источника волновая поверхность. Она отделяет область пространства, где волновое возмущение отлично от нуля, от остальной части пространства.

Расстояние между ближайшими волновыми поверхностями одной фазы называется длиной волны λ . Это расстояние, которое проходит волновая поверхность за время одного периода. $\lambda = vT$, где v – фазовая скорость волны (скорость перемещения волновой поверхности).

В зависимости от геометрии фронта различают следующие простейшие типы волн: плоская, цилиндрическая и сферическая. В случае плоской волны волновая поверхность представляет собой параллельные плоскости, движущиеся вдоль нормального к ним направления. Уравнение плоской бегущей вдоль оси x волны имеет вид:

$$\xi = \xi_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (1.113)$$

Здесь ω – частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, φ_0 – начальная фаза, ξ – отклонение частицы от положения равновесия.

Найдем фазовую скорость волны. Для этого зафиксируем значение фазы $\omega t - kx + \varphi_0 = const$ на некоторой волновой поверхности. Взяв производную по времени от обеих частей этого равенства, найдем величину фазовой скорости:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (1.114)$$

Распространение плоской волны описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 \xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{dt^2}. \quad (1.115)$$

Отдельная монохроматическая волна (1.113) в природе встречается достаточно редко. Чаще всего приходится иметь дело с группой волн (волновым пакетом). Так называется суперпозиция гармонических волн с близкими значениями частот.

Рассмотрим простейший волновой пакет, образованный двумя гармоническими волнами с частотами ω и $\omega + \Delta\omega$, волновыми числами k и $k + \Delta k$:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_m \cos(\omega t - kx) + \xi_m \cos((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x) = \\ &= 2\xi_m \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta kx}{2}\right) \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (1.116)$$

Амплитуда этой волны промодулирована функцией

$$A = 2\xi_m \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta kx}{2}\right). \quad (1.117)$$

За скорость распространения пакета принимается скорость движения максимума функции (1.117). Условие движения максимума $\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x = \text{const}$. Взяв отсюда производную по времени, получим значение групповой скорости (скорости центра группы волн):

$$v_{gp} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.118)$$

Последнее равенство выполняется в пределе малых $\Delta\omega$ и Δk .

Связь между фазовой и групповой скоростями дается соотношением:

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (1.119)$$

Среда называется *диспергирующей*, если фазовая скорость волны в ней зависит от ее длины λ . В противном случае среда называется *недиспергирующей*. Для нее $dv/d\lambda = 0$. В этом случае из (1.119) имеем: $v_{gp} = v$.

Рассмотрим волну, получающуюся в результате наложения двух когерентных волн, бегущих в противоположных направлениях.

$$\xi = \xi_m (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = 2\xi_m \cos \omega t \cos kx.$$

Такая волна не переносит энергию и называется стоячей. На рис. 1.23 изображен профиль волны в различные моменты времени. Точки A , находящиеся в покое, называются узлами. Точки наибольшего размаха B – пучностями. Узлы A изменяют фазу колебаний на π .

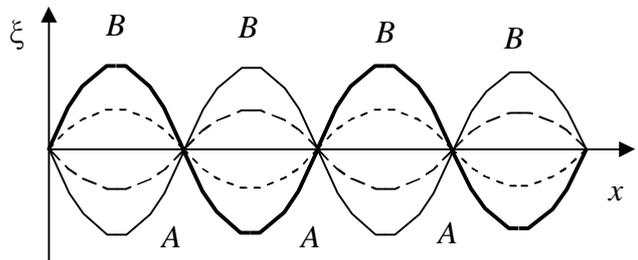


Рис. 1.23

Длина волны равна удвоенному расстоянию между ближайшими узлами.

Уравнение волн можно записывать и в комплексном виде. Например, уравнение бегущей волны (1.113) в этом случае имеет вид: $\xi = \xi_m \exp(i(\omega t - kx + \phi_0))$.

6.11 Звук.

Волны, распространяющиеся в упругой среде, в широком смысле являются звуковыми. По диапазонам частот колебаний различают инфразвуковые волны (частота $\nu < 16$ Гц), звуковые ($16 < \nu < 2 \cdot 10^4$ Гц), ультразвуковые ($2 \cdot 10^4 < \nu < 10^9$ Гц), гиперзвуковые ($\nu > 10^9$ Гц). Такие волны могут распространяться в газах (продольные волны) и твердых телах (продольные и поперечные волны). В кристаллических телах волны могут быть чисто продольными или чисто поперечными только, если скорость волны имеет вполне определенные симметричные направления в решетке. В общем случае волны в кристаллах являются смешанными, т. е. направления смещения частиц расположены под углом $\alpha \neq 90^\circ$, $\alpha \neq 0^\circ$ к направлению скорости волны.

- Скорость звука в газе:

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (1.120)$$

где $\gamma = C_p / C_v$ – показатель адиабаты, μ – молярная масса.

- Скорость звука в жидкости и газе:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (1.121)$$

где k – модуль объемной упругости ($dp = -k dv/v$), ρ – плотность.

- Скорость поперечных звуковых волн в твердом теле:

$$\nu = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (1.122)$$

где G – модуль сдвига.

- Скорость продольных звуковых волн в сплошной твердой среде:

$$\nu = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}, \quad (1.123)$$

где μ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

- Скорость продольных звуковых волн в тонком стержне:

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.124)$$

- Скорость поперечных звуковых волн в натянутой струне:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (1.125)$$

где F – натяжение струны, S – площадь ее поперечного сечения.

Объемная плотность энергии в продольной звуковой волне

$$w = \frac{\rho}{2}(v_1^2 + v^2 \varepsilon^2), \quad (1.126)$$

где v_1 – акустическая скорость (скорость колеблющихся частиц), v – фазовая скорость волны, ε – относительная деформация в волне. Величина w осциллирует во времени. Ее среднее значение:

$$\langle w \rangle = \frac{\rho x_m^2 \omega^2}{2} \quad (1.127)$$

где x_m – амплитуда волны.

Вектором плотности потока энергии (вектором Умова) \dot{S} называется векторная величина, равная количеству энергии, переносимому волной через единицу нормальной к скорости волны площади в единицу времени. Направление \dot{S} совпадает с направлением фазовой скорости волны. Таким образом:

$$\dot{S} = w \mathbf{v}. \quad (1.128)$$

Интенсивностью звуковой волны I называется среднее по времени значение модуля вектора Умова:

$$I = \langle |\dot{S}| \rangle = \langle w \rangle v = \frac{\rho x_m^2 \omega^2 v}{2}. \quad (1.129)$$

Из закона сохранения энергии следует уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_S \dot{S} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div} \dot{S}. \quad (1.130)$$

Здесь интегрирование проводится по замкнутой поверхности.

6.12 Вибрации и шумы энергетических установок

Отрицательное действие вибрации и шума машин на предприятиях энергетического комплекса проявляется в следующем.

1. Снижение надежности и долговечности установок. Статистические данные показывают, что достаточно большое число поломок и аварий порождено повышенной вибрацией.

2. Уменьшение коэффициента полезного действия механического оборудования.

3. Вредное воздействие на окружающую среду.

4. Отрицательное влияние на сооружения, аппараты, в которых установлены машины; на оборудование, установленное в этих объектах.

5. Ухудшение состояния здоровья человека и уменьшение производительности труда. Это проявляется в изменении в нервной и костно-сосудистой системах, повышении артериального давления, ослаблении памяти, нарушении остроты зрения, падении мышечной силы и др. У людей, работающих в условиях повышенного шума, развивается гипертоническая болезнь и невралгия. Исследования показывают, что под действием длительно-го шума производительность труда падает до 60%.

Наиболее вероятными причинами вибраций являются следующие.

1. Неуравновешенность вращающихся масс, например, всегда имеющийся слабый разбаланс в турбине.

2. Несоосность приводов отдельных агрегатов.

3. Нарушение геометрии узлов шип—подшипник.

4. Периодические силы, создаваемые рабочим процессом.

5. Динамическое взаимодействие элементов ротора и статора

Колебания низких и средних частот определяют динамическую прочность элементов машин и несут с собой подавляющую долю колебательной энергии. Эти колебания хорошо распространяются на большие расстояния из-за слабого демпфирования. Увеличить поглощение энергии нежелательных колебаний в самих агрегатах, крепежных устройствах, фундаментах можно путем применения материалов с повышенными демпфирующими свойствами. Пассивное демпфирование в сочетании с активным, т. е. конструкционным – основное направление создания вибропоглощающих систем.

Демпфирующая способность материала определяется как

$$\Psi = \Delta W / W = 2\pi Q^{-1},$$

где ΔW – энергия колебаний, рассеянная за период, W – максимальная энергия колебаний, Q^{-1} – внутреннее трение – величина, обратная добротности. К материалам с высокой демпфирующей способностью относятся, например, серый чугун ($\Psi \sim 5-20 \cdot 10^{-2}$), сплавы высокого демпфирования, такие как Mn-Cu, Cu-Al, сплавы на основе титана и др. В некоторых узлах использование материалов с высокими значениями Ψ недопустимо. Например, к материалам типа валов турбин предъявляются требования относительно низкого демпфирования для избежания нежелательного нагрева валов в процессе эксплуатации и уменьшения потерь мощности турбин.

В диапазоне высоких частот (свыше 1000—2000 Гц) механические колебания машин представляют собой упругие волны, распространяющиеся по элементам конструкции. Для колебаний этих частот характерным является то, что они несут небольшую часть колебательной энергии всего спектра и при распространении хорошо демпфируются.

§7. Элементы механики жидкости и газа

7.1 Движение жидкости и газа.

Механическое движение жидкости и газов, рассматриваемых как сплошные среды, изучает раздел физики, называемый *гидроаэромеханикой* (*гидродинамикой*). Рассмотрим некоторые простейшие сведения из этого раздела.

Закон Паскаля. Давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем оно одинаково передается по всему объему покоящейся жидкости.

Давление, создаваемое столбом жидкости высоты h , называется гидростатическим. Оно определяется выражением

$$P = \rho gh. \quad (1.131)$$

Движение жидкости называется течением, а совокупность движущихся частиц жидкости – потоком. Графически движение жидкости изображается при помощи линий тока. Это воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке направлены так же, как и вектор скорости в этой же точке. Если в текущей жидкости выбрать произвольный замкнутый контур и через каждую его точку провести линию тока, то полученная поверхность выделяет трубку тока. Количество жидкости, проходящее в любом сечении трубки тока за единицу времени, одинаково. Если S_1 и S_2 – площади этих сечений, а v_1 и v_2 – соответствующие скорости, то

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = const. \quad (1.132)$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности.

7.2 Уравнение Бернулли.

Рассмотрим трубку тока, изображенную на рис. 1.24. За малый отрезок времени частицы жидкости выделенного объема смещаются от сечения S_1 и S_2 к сечениям S'_1 и S'_2 , расположенным на высоте h_1 и h_2 соответственно, скорости течений в них \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . За рассматриваемый отрезок времени изменится состояние жидкости только в заштрихованных областях. Между ними состояние движущейся жидкости стационарно. Из закона сохранения энергии, примененного к заштрихованным объемам:

$$E_2 - E_1 = A = F_1 l_1 + F_2 l_2. \quad (1.133)$$

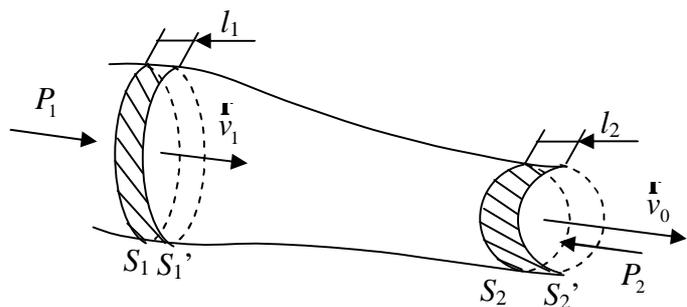


Рис. 1.24

Но $F_1 = p_1 S_1$, $F_2 = -p_2 S_2$, $l_1 = v_1 \Delta t$, $l_2 = v_2 \Delta t$. Кроме того $E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1$, $E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$ – полные энергии одинаковой массы в заштрихованных областях. Подставляя эти выражения в (1.133), получаем:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (1.134)$$

Из уравнения неразрывности: $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$. Разделив (1.134) на ΔV , получаем:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const. \quad (1.135)$$

Это – уравнение Бернулли. Оно справедливо для идеальной жидкости – не сжимаемой, не обладающей вязкостью. Величина p в (1.135) называется статическим, $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамическим, ρgh – гидростатическим давлением.

Уравнение Бернулли позволяет аналитически рассматривать и решать с достаточно высокой точностью множество практических задач. Из него можно получить скорость истечения жидкости через отверстие. Положив на свободной поверхности на высоте h давление равным атмосферному, которое имеется и у отверстия $p_1 = p_2 = p_{атм}$ и считая, что отверстие находится на нулевой высоте, из уравнения Бернулли получаем:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1.136)$$

Здесь мы пренебрегли скоростью жидкости в широком сосуде по сравнению со скоростью в отверстии. Формула (1.136) принадлежит Торричелли.

§8. Элементы теории относительности

8.1 Принцип относительности Галилея

Пусть инерциальная система отсчета K' движется поступательно с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 относительно другой инерциальной системы отсчета K (рис. 1.25а). Оси координат в системах выберем параллельными и обозначим x, y, z и x', y', z' . В ньютоновской механике расстояния между двумя точками, а также ход времени считаются одинаковыми: $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$, $t = t'$.

Соотношение между радиусами-векторами в системах K и K' можно записать в виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t', \quad t = t'. \quad (1.137)$$

Это означает, что $x = x' + v_{ox} t'$; $y = y' + v_{oy} t'$; $z = z' + v_{oz} t'$. Соотношение, обратное (1.137), имеет вид: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t$; $t' = t$. При рассмотрении взаимного

движения систем отсчета оси x и x' выбирают обычно так, как показано на рис. 1.25б. Тогда преобразование координат при переходе от системы K' к K можно записать в виде:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (1.138)$$

Продифференцировав (1.138) по времени, получим соотношения для скоростей и ускорений в системах K и K' :

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\mathbf{v}}_0, \quad \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}'. \quad (1.139)$$

Соотношения (1.137) - (1.139) называются преобразованиями Галилея при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Силы взаимодействия между материальными точками могут зависеть только от их взаимных расстояний и скоростей. Преобразования Галилея не изменяют не тех, ни других. Поэтому силы взаимодействия во всех инерциальных системах не изменяются. Кроме того, согласно (1.139), ускорения точек одинаковы в этих системах. Поэтому уравнения динамики (второй и третий законы Ньютона) имеют одинаковую форму записи в любой инерциальной системе отсчета.

Таким образом, в ньютоновской механике справедлив *принцип относительности Галилея*: законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Конкретный характер движения тел в различных инерциальных системах отсчета зависит от начальных условий, т. е. начальных координат и скоростей. Но законы, которые управляют этим движением, одинаковы.

8.2 Постулаты специальной теории относительности.

Исследование явлений, происходящих при скоростях v , близких к скорости света c , показывают неприменимость законов классической механики в физике высоких скоростей, которую называют релятивистской физикой. Специальная теория относительности описывает явления, происходящие при высоких скоростях в слабых гравитационных полях. Специальная теория относительности – физическая теория пространства и времени, в которой пространство считается однородным и изотропным, а время – однородным. При этом все законы Ньютона считаются частным случаем специальной теории

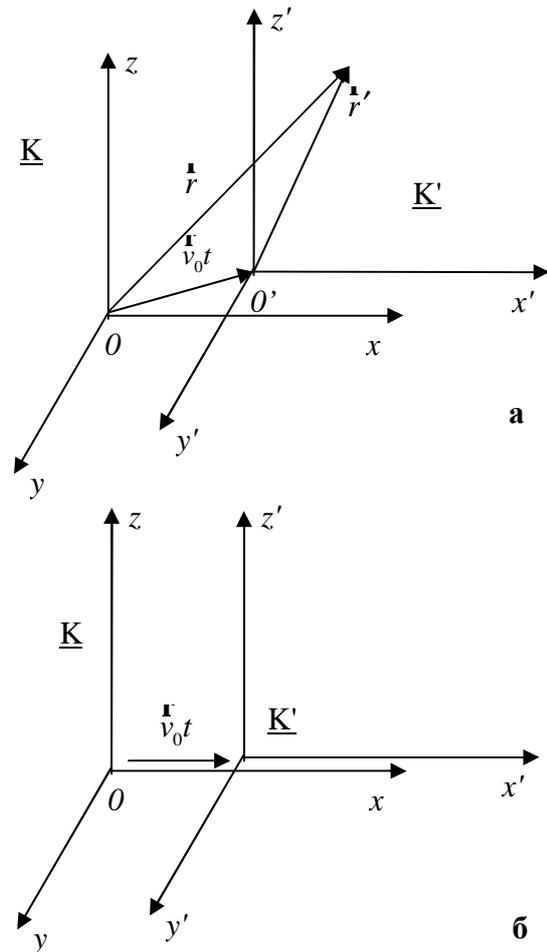


Рис. 1.25

относительности при соотношении $v \ll c$. Наиболее общие пространственно - временные закономерности с учетом тяготения описываются в общей теории относительности.

Специальная теория относительности исходит из двух основных постулатов, сформулированных Эйнштейном в 1905 г.

Первый постулат: в любых инерциальных системах отсчета все законы природы одинаковы. Он обобщает принцип относительности Галилея на все законы природы, не только механические. Его называют принципом относительности Эйнштейна.

Второй постулат: скорость света в вакууме не зависит от движения источников света и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Инвариантным называется закон или величина, имеющая одинаковую форму (вид) или значение во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость света инвариантна.

Для описания событий в определенной системе необходимо задавать их координаты и моменты времени. Это можно осуществить путем создания в пространстве меток и совмещения с ними часов. Первый процесс принципиально прост и осуществляется с применением эталонной линейки. Второй процесс требует, чтобы часы в различных точках системы шли одинаково, и были синхронизированы. Синхронизацию часов можно осуществить световым лучом (т. к. его скорость изотропна и инвариантна). Для этого из точки A в момент времени t_1 посылается луч в точку B , где он, отразившись от зеркала, возвращается назад в точку A в момент времени t_2 . Тогда часы B будут синхронизированы с часами в A , если в момент отражения они покажут время $t = \frac{(t_1 + t_2)}{2}$.

Постоянство скорости света приводит к тому, что пространство и время оказываются взаимосвязанными, образуя единое пространство-время. Вводится воображаемое четырехмерное пространство, по осям которого откладываются координаты x, y, z , а по четвертой оси величина ct , пропорциональная времени и имеющая размерность координаты. Любому событию, происходящему с материальной точкой в определенный момент времени соответствует точка в четырехмерном пространстве с координатами (x, y, z, ct) . Она называется мировой точкой. Всякой материальной точке в этом пространстве соответствует некоторая линия, называемая мировой линией. В случае покоящейся точки она параллельна оси ct .

8.3 Преобразования Лоренца.

По сравнению с классической механикой преобразование координат и времени при переходе между инерциальными системами отсчета в релятивистской теории является более сложным. Для выбора осей координат в системах K и K' , показанного на рис. 1.25б, соответствующие соотношения были получены Х. Лоренцем и имеют вид:

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.140)$$

Обратные соотношения:

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.141)$$

Здесь $\beta = v_0/c$. В случае малых скоростей $v_0 \ll c$ преобразования (1.140) переходят в преобразования Галилея (1.138). Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с классической точки зрения свойств.

1) Длина тела в разных системах отсчета. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' системы K' , неподвижный в ней. Его длина в этой системе $l_0 = x'_2 - x'_1$, где справа записаны координаты его концов. Относительно системы K стержень движется со скоростью v_0 . Его длина в системе K равна $l = x_2 - x_1$. Используя (1.141) для связи x_1 , x_2 и x'_1 , x'_2 для одного момента времени t в системе K , получим $l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, откуда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.142)$$

Размеры движущихся тел в направлении движения сокращаются. Это явление называют лоренцевым сокращением. Размеры стержней, расположенных вдоль y' и z' не изменяются.

2) Одновременность событий. Пусть в системе K в точках x_1 и x_2 происходят одновременно в момент t два события. Согласно (1.141) в системе K' этим событиям соответствуют моменты

$$t'_1 = \frac{t - \left(\frac{\beta}{c}\right)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{и} \quad t'_2 = \frac{t - \left(\frac{\beta}{c}\right)x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.143)$$

Это означает, что одновременные события в системе K , происходящие в разных точках не будут одновременными в системе K' . Знак разности $t'_2 - t'_1$, зависит от выбора системы K' . Для причинно не связанных событий в системе K , наступление события 1 может быть раньше или позже события 2. Для причинно связанных событий причина всегда предшествует следствию.

3) Интервал времени между событиями. Пусть в одной и той же точке x' системы K' происходят два события в моменты t'_1 и t'_2 . Согласно (1.140) в системе K им отвечают моменты t_1 и t_2 , такие, что $t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Интервал

$t'_2 - t'_1 = \Delta t'$ событий в системе, относительно которой точка покоится (находится в одной координате x') называется собственным интервалом. Тогда:

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.144)$$

Это выражение показывает, что собственный интервал времени (отсчитанный по неподвижным относительно тела часам) всегда меньше, чем отсчитанный по часам, движущимся относительно тела.

8.4 Основной закон релятивистской динамики.

Инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца формой второго закона Ньютона является:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}; \quad \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}}; \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.145)$$

Последнее соотношение показывает зависимость массы материальной точки от ее скорости. При скоростях $v \ll c$ формулы (1.145) совпадают с классическими. При возрастании скорости частицы ее масса возрастает, а импульс растет быстрее, чем в механике Ньютона. Следует отметить, что при переходе к иной инерциальной системе отсчета выражения для силы и импульса частицы меняются. В выражениях (1.145) m_0 называют массой покоя частицы, а m – релятивистской массой.

В силу однородности пространства в релятивистской механике по-прежнему выполняется закон сохранения импульса. Релятивистский импульс замкнутой системы с течением времени не изменяется.

8.5 Взаимосвязь массы и энергии.

Как было показано раньше приращение кинетической энергии $dW_\kappa = \mathbf{F} d\mathbf{r}$. Учитывая, что $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, $\mathbf{v} d\mathbf{v} = v dv$ и соотношения (1.145), полу-

чим: $dW_\kappa = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) v dt = v d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$. Это приводит к соотношению:

$$dW_\kappa = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = c^2 dm. \quad (1.146)$$

Интегрируем это уравнение с учетом того, что при $v = 0$ масса равна m_0 :

$$W_\kappa = mc^2 - m_0 c^2. \quad (1.147)$$

Второе слагаемое справа в (1.147) – константа интегрирования, называемая энергией покоя. Первое слагаемое справа называется полной энергией тела.

$$W_0 = m_0 c^2; \quad W = mc^2. \quad (1.148)$$

В выражении для полной энергии не учитывается энергия частицы и тела во внешнем поле. Таким образом, согласно (1.147) кинетическая энергия тела равна разности его полной энергии и энергии покоя:

$$W_{\kappa} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) m_0 c^2. \quad (1.149)$$

В случае $v \ll c$ выражение (1.149) переходит в $W_{\kappa} = mv^2/2$. Если система частиц путем взаимодействия связывается в единое целое, то энергия связи находится как разность исходных энергий покоя всех частиц и образовавшейся их совокупности. При этом масса последней M не равна сумме масс покоя частиц $\sum_i m_i$:

$$W_{св} = \sum_i m_i c^2 - M c^2. \quad (1.150)$$

Выражение (1.150) является основой ядерной энергетики.

§ 9. Молекулярная теория

9.1. Основы и содержание молекулярно кинетической теории

Раздел физики, в котором изучают физические свойства тел в зависимости от их микроскопического строения и характера движения образующих их частиц, называют молекулярной физикой. Основной ее задачей является исследование агрегатных состояний вещества, а также анализ переходов из одного состояния в другое. Микроскопической основой молекулярной физики является молекулярно-кинетическая теория, важнейшие положения которой следующие.

1. Все вещества состоят из огромного количества частиц (молекул, атомов, ионов), которые имеют малые размеры ($\sim 10^{-10}$ м) и находятся в состоянии хаотического теплового движения.

2. Средняя кинетическая энергия теплового движения определяет температуру тела, при повышении которой интенсивность теплового движения растет.

3. На близких расстояниях частицы взаимодействуют, т. е. могут притягиваться и отталкиваться.

Макроскопическими называются тела или системы, состоящие из огромного количества частиц.

Атомной единицей массы (а. е. м.) называют $\frac{1}{12}$ часть массы атома изотопа ^{12}C . 1 а. е. м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Относительную массу молекулы, выраженную в а. е. м., называют молекулярной массой M_r . Единицу количества вещества, содержащую столько же частиц, сколько атомов в 0,012 кг изотопа ^{12}C , называют молем. Моль любого вещества содержит число частиц $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ (постоянная Авогадро). Количество молей обозначают через ν . Масса моля, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе.

Макроскопические свойства вещества, описываемые в молекулярной физике, не зависят от внутреннего строения молекул, которое можно считать неизменным. Существует два способа описания процессов, происходящих в макроскопических телах – *статистический и термодинамический*.

Статистический метод основан на использовании теории вероятностей и определенных моделей строения изучаемых систем. Поведение систем из

колоссально большого количества частиц проявляет статистические закономерности. Свойства таких систем обусловлены не только индивидуальными свойствами самих частиц, но также особенностями их совокупного движения и средних характеристик такого движения. Раздел физики, изучающий статистическим методом физические свойства макроскопических систем, называется статистической физикой.

Термодинамический метод основан на анализе количественных соотношений при различных превращениях энергии в системе. Он не рассматривает внутреннее строение и характер движения частиц, не выдвигает микроскопических гипотез, поэтому является более общим, чем статистический метод. Раздел физики, изучающий свойства макроскопических систем термодинамическим способом, называется термодинамикой.

9.2 Термодинамическая система. Термодинамический процесс

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических объектов, обменивающихся энергией в форме работы и теплоты как друг с другом, так и с внешней средой.

Термодинамическая система называется замкнутой или изолированной, если она не может обмениваться с внешней средой ни энергией, ни веществом.

Термодинамическая система называется изолированной в тепловом отношении или адиабатной, если отсутствует теплообмен между ней и окружающей средой.

Термодинамическая система называется изолированной в механическом отношении, если она способна обмениваться с внешней средой энергией только путем теплообмена, без совершения механической работы.

Термодинамическая система называется открытой, если она обменивается с внешней средой и веществом, и энергией.

Термодинамическая система называется закрытой, если она не обменивается веществом с внешней средой.

Гомогенной называется термодинамическая система, внутри которой нет поверхностей раздела, отделяющих друг от друга макроскопические части системы. В противном случае она называется гетерогенной.

Фазой называется гомогенная часть гетерогенной системы.

Различают фазы, соответствующие разным агрегатным состояниям вещества. Однако, понятие фазы шире. Например, могут существовать несколько жидких, взаимно нерастворимых фаз, разделенных границами. В твердом теле могут существовать несколько фаз (например, различающихся кристаллической структурой).

Компонентами термодинамической системы называются различные вещества, наименьшее число которых достаточно для образования всех фаз системы.

Термодинамическими параметрами (параметрами состояния) называются физические величины, характеризующие состояние термодинамиче-

ской системы.

Термодинамические параметры, значения которых пропорциональны количеству вещества, называют экстенсивными или аддитивными; значения же которых не зависят от количества вещества – интенсивными. К первым можно отнести массу, объем, ко вторым – температуру, намагниченность и т.д.

Внешними параметрами системы называются физические величины, зависящие от положения и свойств тел, которые являются внешними по отношению к данной системе. Например, для газа внешним параметром является объем, для магнетика – напряженность магнитного поля.

Внутренними параметрами системы называются физические величины, зависящие как от положения внешних тел, так и от состояния движения частиц, образующих систему. Для газа внутренними параметрами, например, являются давление и энергия.

Равновесным называется состояние термодинамической системы, характеризующееся при неизменных внешних условиях постоянством параметров системы и отсутствием в системе различных потоков. Если же речь идет только о неизменности во времени параметров системы, то состояние называется стационарным. При этом в системе могут существовать потоки.

Термодинамическим процессом называется всякое изменение состояния термодинамической системы, при котором изменяется хотя бы один ее параметр состояния.

Термодинамический процесс называется равновесным, если система проходит непрерывный ряд термодинамически равновесных состояний.

Если реальный процесс осуществляется медленно, то он называется квазистатическим. Такой процесс близок к равновесному.

9.3 Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа.

В молекулярной физике используют модель идеального газа, в которой считают, что молекулы большую часть времени находятся в состоянии свободного движения, лишь в короткие отрезки времени испытывая столкновения с другими молекулами или стенками сосуда. При этом их потенциальная энергия равна нулю, а полная энергия газа равна сумме кинетических энергий молекул. Реальный газ можно рассматривать как идеальный, если средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул значительно меньше их кинетической энергии. Многие газы при нормальных условиях можно приближенно считать идеальными.

Уравнение, связывающее между собой давление газа p , его объем V и температуру T , называется термическим уравнением состояния:

$$f(p, V, T) = 0. \quad (2.1)$$

Таким уравнением описывается состояние простой системы, у которой имеется один внешний параметр V , а внешних полей нет. Для идеального газа ис-

пользуют уравнение состояния, известное как уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT. \quad (2.2)$$

Здесь $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$ – число молей газа, m – его масса, μ – молярная масса, N – число частиц в нем, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная. Вводя величины $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянную Больцмана, $n = \frac{N}{V}$ – концентрацию (плотность) молекул газа, уравнение (2.2) можно записать в виде:

$$p = nkT. \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.2) можно получить уравнения некоторых изопроцессов, полагая равной константе давление, температуру или объем. Эти процессы носят названия соответственно изобарный, изотермический и изохорный.

Для идеального газа справедлив закон Дальтона: *давление смеси газов равно сумме парциальных давлений каждого газа.*

$$p = \sum_i p_i. \quad (2.4)$$

Парциальным называется давление одного компонента газовой смеси если ему предоставлен весь объем сосуда.

В качестве единицы давления (отношение силы, нормально действующей на поверхность, к ее площади) используются следующие единицы.

1. Паскаль – единица давления в системе СИ. $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.
2. Техническая атмосфера – давление, создаваемое силой тяжести массы в 1 кг на площади в 1 см^2 . $1 \text{ ат} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}$.
3. Миллиметр ртутного столба – давление ртути с высотой столба в 1 мм, $p = \rho gh$, где $h = 0,001 \text{ м}$, ρ – плотность ртути. Иначе эта единица называется Торр. $1 \text{ мм. рт. ст.} = 133 \text{ Па}$.
4. Физическая атмосфера – давление в 760 мм.рт.ст. $1 \text{ атм.} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1,033 \text{ ат}$.
5. Баром называется давление в 10^5 Па . $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$.

9.4 Давление газа на стенку.

Найдем давление, оказываемое молекулами идеального газа на стенку сосуда, в котором он находится. Считаем удары молекул абсолютно упругими, т. е. угол падения Θ равен углу отражения от стенки. Импульс, сообщаемый одной молекулой массы m , движущейся к стенке со скоростью v , равен (см. рис. 2.1):

$$2m v \cos \Theta. \quad (2.5)$$

Столкнутся со стенкой площади ΔS за время Δt молекулы, находящиеся от

стенки по направлению движения на расстоянии $v\Delta t$. Число таких молекул, движущихся в пределах телесного угла $d\Omega = \sin\Theta d\varphi d\Theta$, равно их числу, попавшему в объем косоугольного цилиндра $\Delta S v \cos\Theta \Delta t$:

$$dN(v) = dn(v) v \cos\Theta \Delta S \Delta t \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (2.6)$$

где $dn(v)$ – число молекул в единице объема, имеющих скорость в пределах от v до $v + dv$. Импульс, переданный стенке всеми такими молекулами:

$$dK = 2mv \cos\Theta dN = 2m\Delta S \Delta t v^2 \cos^2\Theta dn(v) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (2.7)$$

Здесь учтено, что доля молекул, движущихся к стенке в пределах телесного угла $d\Omega$, равна $d\Omega/4\pi$. Интегрируя в сферической системе координат (рис.

2.1) выражение (2.7) по направлениям полупространства $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, имеем:

$$\Delta K = \frac{2m\Delta S \Delta t}{4\pi} \int_0^{v_{\max}} v^2 dn(v) \int_0^{\pi/2} \cos^2\Theta \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (2.8)$$

Давление, с учетом второго закона Ньютона, записанного в импульсной форме, определяется соотношением:

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S \Delta t}. \quad (2.9)$$

Введем понятие средней квадратической скорости как:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{v_{\max}} v^2 dn(v). \quad (2.10)$$

Значения интегралов в (2.8) по Θ и φ соответственно равны $1/3$ и 2π . С учетом всего сказанного:

$$p = \frac{mn \langle v^2 \rangle}{3}. \quad (2.11)$$

Если ввести среднюю кинетическую энергию молекул $\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \langle E_K \rangle$, то (2.11) примет вид:

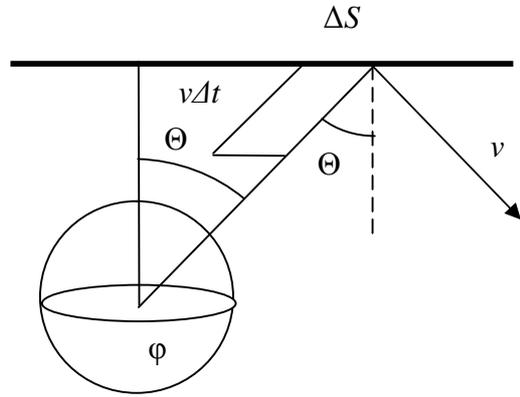


Рис. 2.1

$$p = \frac{2}{3}n \langle E_k \rangle. \quad (2.12)$$

9.5 Средняя энергия молекул

Сравнивая выражения (2.3) и (2.12), получаем:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2}kT. \quad (2.13)$$

Таким образом, термодинамическая температура есть величина пропорциональная средней энергии поступательного движения молекул.

По причине изотропности свойств газа (одинаковости свойств в разных направлениях) $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$, где через $\langle v_x^2 \rangle$ обозначено среднее значение квадрата одной компоненты скорости:

$$\langle E_{kx} \rangle = \frac{1}{2}kT. \quad (2.14)$$

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых параметров, полностью определяющих положение системы в пространстве.

Если это понятие отнести к одной молекуле газа, то в зависимости от конфигурации, число ее степеней свободы i может принимать различные значения. Каждый атом, входящий в состав молекулы, будем считать материальной точкой. Тогда для одноатомной молекулы число степеней свободы равно трем ($i = 3$), все они соответствуют поступательному движению точки вдоль каждой из трех координатных осей. Двухатомную молекулу можно представить в виде двух материальных точек, связанных достаточно жесткой связью. При температурах, когда деформации этой связи отсутствуют положение молекулы можно определить путем задания, например, координат ее центра масс (три поступательные степени свободы) и углов поворота отрезка, соединяющего атомы, вокруг двух осей вращения, перпендикулярных этому отрезку. Таким образом, в этом случае всего имеется пять степеней свободы ($i = 5$). Из них три – поступательные и две – вращательные. Такие же рассуждения можно отнести и к любой линейной молекуле. Если число атомов в молекуле больше двух и они не лежат на одной прямой, то к имеющимся степеням свободы добавляется еще одна, связанная с вращением вокруг третьей оси, нормальной к двум предыдущим. Тогда число степеней свободы молекулы становится равным 6 ($i = 6$), по три на поступательные и вращательные степени.

В классической статистической физике выводится закон равнораспределения, согласно которому на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия равная $kT/2$. На всю молекулу, таким образом, приходится энергия $ikT/2$, а на моль идеального газа:

$$U = \frac{i}{2}RT. \quad (2.15)$$

При более высоких температурах связь между атомами в молекуле нельзя считать жесткой, необходимо допустить возможность упругой связи. В этом случае в молекуле могут возникнуть колебательные движения. На каждую колебательную степень свободы приходится средняя энергия kT (по $kT/2$ на среднюю кинетическую и столько же на среднюю потенциальную энергии). В этом случае в (2.15) под i необходимо понимать величину $i + 2i'$, где i' – число колебательных степеней свободы. Поскольку общее число степеней свободы N -атомной молекулы равно $3N$, число степеней свободы, определяющих положение молекулы по отношению к поступательному и вращательному движению как целого – 6, то колебательных степеней свободы остается $i' = 3N - 6$.

9.6 Распределение Максвелла молекул газа по скоростям.

Для нахождения функции, описывающей распределение молекул газа по величинам их скоростей, будем обозначать состояние движения каждой молекулы точкой в воображаемом математическом пространстве скоростей. В этом пространстве выберем оси координат, по которым будем откладывать величины проекций скоростей: v_x, v_y, v_z . Совокупность движущихся с различными скоростями молекул изображается в виде множества точек, изотропно распределенных в пространстве. Точки, удаленные на большое расстояние от начала координат,

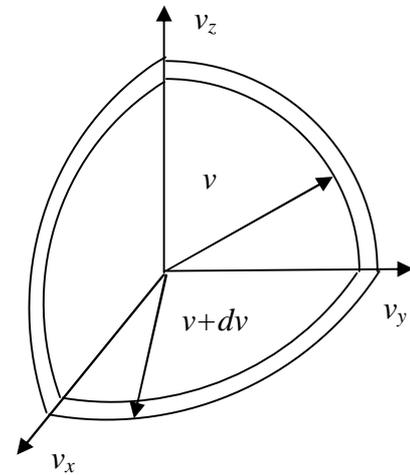


Рис. 2.2

соответствуют молекулам с большими модулями скорости. Таких молекул в газе относительно немного, поэтому плотность таких точек мала на больших расстояниях от начала координат (рис. 2.2). Плотность точек зависит лишь от модуля скорости v . Если N – полное число молекул в газе, то эта плотность $Nf(v)$. Тогда число молекул с компонентами скорости между v_x и $v_x + dv_x$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$ равно:

$$\begin{aligned} dN_{xyz} &= Nf(v)dv_x dv_y dv_z \\ dP_{xyz} &= f(v)dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (2.16)$$

Точки, соответствующие молекулам с модулем скорости от v до $v + dv$, попадают в сферический слой с радиусами v и $v + dv$ (рис. 2.2). Число таких молекул:

$$\begin{aligned} dN &= Nf(v) \cdot 4\pi v^2 dv \\ dP &= 4\pi v^2 f(v) dv \end{aligned} \quad (2.17)$$

В формулах (2.16) и (2.17) введены вероятности dP_{xyz} и dP для молекул $\frac{dN_{xyz}}{N}$ и $\frac{dN}{N}$ иметь соответствующие скорости.

Вероятность нахождения x -компоненты скорости молекулы (y - и z -) в интервале от v_x до $v_x + dv_x$ (от v_y до $v_y + dv_y$, от v_z до $v_z + dv_z$) можно записать как:

$$\begin{aligned} dP_x &= \varphi(v_x) dv_x \\ dP_y &= \varphi(v_y) dv_y \\ dP_z &= \varphi(v_z) dv_z \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эти вероятности взаимно независимы. Поэтому вероятность одновременного принятия значений компонент скорости в указанных пределах равна произведению вероятностей (2.18). С учетом (2.16) это дает:

$$f(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z). \quad (2.19)$$

Возьмем натуральный логарифм от (2.19) и продифференцируем полученное равенство по v_x :

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}. \quad (2.20)$$

Поскольку $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, то $\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}$. Тогда (2.20) принимает вид:

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{1}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} \frac{1}{v_x}. \quad (2.21)$$

Правая часть в (2.21) не зависит от v_y и v_z , а значит, и левая часть от них (как впрочем, и от v_x , поскольку они равноправны) не зависит. Приходим к заключению, что обе части равны некоторой константе. Обозначим ее через $-\alpha$:

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} \frac{1}{v_x} = -\alpha. \quad (2.22)$$

Решая дифференциальное уравнение (2.22), получаем:

$$\varphi(v_x) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right); \quad \varphi(v_y) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_y^2}{2}\right); \quad \varphi(v_z) = A \exp\left(-\frac{\alpha v_z^2}{2}\right). \quad (2.23)$$

Перемножая (2.23), находим:

$$f(v) = A^3 \exp\left(-\frac{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}\right) = A^3 \exp\left(-\frac{\alpha v^2}{2}\right). \quad (2.24)$$

Чтобы исключить неограниченное возрастание функций (2.23) и (2.24) α должно быть положительным. Постоянную A можно найти из условия нормировки:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) dv_x = 1 \quad (2.25)$$

В (2.25) пределы интегрирования взяты бесконечными, т. к. с одной стороны нет принципиальной верхней границы для скорости молекулы, а с другой стороны подинтегральные функции очень быстро стремятся к нулю, поэтому точное значение пределов интегрирования, когда они очень большие, не столь важны.

Используем в (2.25) значение интегралов Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad (2.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\beta x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}, \quad (2.27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-\beta x^2) dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}}, \quad (2.28)$$

получаем:

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}; \quad \varphi(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right). \quad (2.29)$$

Энергия одной поступательной степени свободы $\frac{m \langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$. Отсюда:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}. \quad (2.30)$$

Найдем $\langle v_x^2 \rangle$. Из теории вероятностей известно, что для этого нужно вычислить интеграл:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \cdot \varphi(v_x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp\left(-\frac{\alpha v_x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.31)$$

Здесь использовано значение интеграла (2.27).

Сравнение (2.31) и (2.30) дает $\alpha = \frac{m}{kT}$. Окончательно для функций рас-

пределения получаем:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right), \quad (2.32)$$

$$F(v) = 4\pi v^2 f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (2.33)$$

Выражения (2.32) и (2.33) представляют распределение молекул газа по скоростям, принадлежащее Максвеллу. Графики этих функций приведены на рис. 2.3.

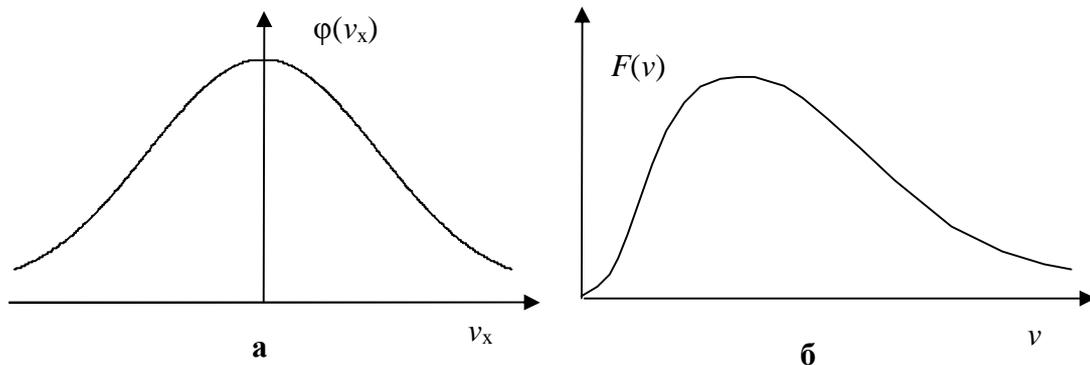


Рис. 2.3

При увеличении температуры максимум кривой $F(v)$ смещается в сторону больших v , так что площадь под кривой остается при любой температуре равной 1 (нормировка вероятности).

9.7 Тепловые скорости молекул.

Распределение (2.33) и соответствующий ему рисунок 2.3б позволяют находить относительное число молекул dN/N , скорости которых находятся в пределах от v до $v + dv$. Найдем следующие характерные скорости молекул:

1. Средняя квадратичная скорость $v_{ск}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}}$;

$$v_{ск} = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (2.34)$$

Здесь использовано (2.28).

2. Средняя (арифметическая) скорость $v_{cp} = \langle v \rangle = \frac{\sum v_i}{N}$;

$$v_{cp} = \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (2.35)$$

Здесь использовано интегрирование по частям.

3. Наивероятнейшая скорость $v_{нв}$ соответствует максимуму кривой рис. 2.3б. Она находится путем приравнивания производной от (2.33) по v нулю.

$$v_{нв} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.36)$$

Полученные скорости таковы, что $v_{нв} < v_{ср} < v_{ск}$.

Распределение Максвелла экспериментально неоднократно проверялось на опытах. Наиболее известные из них, опыты Штерна и опыт Ламмерта, описаны в школьном учебнике физики.

9.8 Барометрическая формула. Распределение Больцмана.

Атмосферное давление убывает с высотой. Найдем зависимость этого давления от высоты. Давление на высоте h обусловлено весом столба воздуха, расположенного выше h . С увеличением высоты давление падает. Убыль давления $-dp$ при подъеме на dh равна весу воздуха, заключенного в столбе высотой dh

$$-dp = \rho g dh, \quad (2.37)$$

где $\rho = \frac{P\mu}{RT}$ – плотность воздуха, выраженная из уравнения Менделеева-Клапейрона. Подставив это в (2.37), получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (2.38)$$

Интегрируем (2.38) с дополнительным условием $p(0) = p_0$ – давление на нулевой высоте (на уровне моря). Получаем:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \quad (2.39)$$

Выражение (2.39) называется барометрической формулой. Оно верно только для изотермической атмосферы. В реальной атмосфере температура изменяется с высотой. Однако, по шкале Кельвина относительное ее изменение не очень велико. Поэтому формула (2.39) достаточно хорошо выполняется. Измеряя давление воздуха в атмосфере, можно найти высоту расположения точки над уровнем моря. Прибор, предназначенный для этого, называется альтиметром.

Учтем в (2.39) следующие соотношения: $\frac{\mu}{R} = \frac{m}{k}$, $p = nkT$, $p_0 = n_0 kT$, тогда:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \quad (2.40)$$

В (2.40) n и n_0 – концентрация молекул на высотах h и 0 . Формула (2.40) отражает противоборство двух факторов – потенциальной и тепловой энергии частиц. Увеличение m приводит к группировке частиц у поверхности $h = 0$, увеличение же T приводит к обратному процессу рассеяния частиц по высоте. Поскольку потенциальная энергия частицы $E_n = mgh$, то формулу (2.40) можно записать в виде:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \text{ или } dN_{xyz} = n_0 \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) dx dy dz. \quad (2.41)$$

Формула (2.41) выражает количество частиц с энергией E_n , попавших в объем $dx dy dz$. Обе формулы (2.41) соответствуют распределению Больцмана молекул газа по их потенциальной энергии, в качестве которой может выступать не только энергия в поле тяжести, но и любая другая.

Распределения Максвелла и Больцмана имеют схожий вид. В первом определяющую роль играет кинетическая энергия молекул, во втором – потенциальная. Оба их можно объединить в одно распределение Максвелла-Больцмана:

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_k + E_n}{kT}\right) dv_x dv_y dv_z dx dy dz \quad (2.42)$$

Слева в выражении (2.42) стоит число молекул, попадающих в объем координатного пространства $dx dy dz$ и скоростного пространства $dv_x dv_y dv_z$, а справа – в виде сомножителя эти объемы.

Распределение Максвелла-Больцмана можно представить иначе, если записать его для числа молекул в единице объема, находящихся в потенциальном поле с энергией E_n и имеющих скорость в интервале от v до $v + dv$

$$dN = 4\pi n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{E_k + E_n}{kT}\right) dv. \quad (2.43)$$

Если полная энергия молекулы может принимать только дискретные значения E_1, E_2, \dots, E_n , то распределение Больцмана для i -го состояния имеет вид:

$$N_i = a \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right). \quad (2.44)$$

Здесь N_i – число молекул в i -состоянии. Суммирование по всем состояниям дает полное число молекул: $\sum N_i = N = a \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)$, откуда

$a = N \left[\sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \right]^{-1}$. Окончательно получаем (2.44) в виде:

$$N_i = N \frac{\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}{\sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}. \quad (2.45)$$

§10. Термодинамика

10.1 Первый закон термодинамики.

Всякую термодинамическую систему можно характеризовать внутренней энергией U , которая зависит от состояния этой системы. Такие величины, которые определяются только состоянием системы и не зависят от того, как оно получено, называют функциями состояния. В термодинамике, не рассматривающей химические реакции, перестройки структуры электронных оболочек атомов и ядерные процессы, под внутренней энергией понимается сумма кинетической энергии движения молекул (поступательного, вращательного и колебательного) и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия.

Изменить внутреннюю энергию системы можно двумя способами: совершением работы или теплообменом. При совершении работы изменяются внешние параметры системы, например работа расширения газа $\delta A = p dV$. Считается, что работа δA системы над внешними телами положительна, а работа $\delta A'$ внешних тел над системой отрицательна. При теплообмене происходит передача энергии от более нагретых тел к менее нагретым без изменения внешних параметров. Теплообмен может осуществляться тремя способами: теплопроводностью, конвекцией и излучением. Количественно переданная энергия при этом характеризуется количеством теплоты δQ . В отличие от внутренней энергии, изменение которой dU определяется изменением состояния системы, работа δA и количество теплоты δQ зависят от происходящего с системой процесса. Поскольку A и Q при этом не являются полными дифференциалами каких-либо функций, для их изменения используется знак δ . Для изменения внутренней энергии используется знак полного дифференциала d .

Первый закон термодинамики гласит: *теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение ею работы против внешних сил:*

$$Q = \Delta U + A. \quad (2.46)$$

В дифференциальной форме соотношение (2.46) записывают как

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (2.47)$$

Первый закон термодинамики, по-существу, является законом сохранения энергии применительно к термодинамическим процессам.

Термодинамические процессы удобно изображать в координатах, связывающих два параметра системы. Например, состояние газа можно изображать в координатах p - V , V - T , p - T . Графики процессов в таких координатах называют диаграммами. Одна из таких диаграмм, а именно p - V , удобна для представления процесса, в котором нужно рассчитывать работу (рис. 2.4).

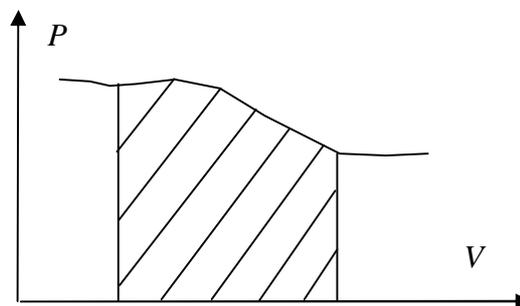


Рис. 2.4

Поскольку $\delta A = p dV$, то полная работа равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, графиком процесса $p(V)$ и вертикальными линиями V_1 и V_2 :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV . \quad (2.48)$$

10.2 Теплоемкость

Теплоемкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин.

$$C_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT} . \quad (2.49)$$

Удельной теплоемкостью называется теплоемкость единицы массы вещества

$$c = \frac{\delta Q}{m dT} . \quad (2.50)$$

Молярной теплоемкостью называется теплоемкость одного моля вещества

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \mu c \quad (2.51)$$

Поскольку δQ определяется процессом теплопередачи, теплоемкость тоже различна для различных процессов. Наиболее важными, получившими наибольшее применение, являются молярные теплоемкости при постоянных объеме и давлении C_V и C_P (изохорная и изобарная молярные теплоемкости).

В случае изохорного процесса $\delta A = 0$ и $\delta Q = dU$. Тогда

$$C_V = \frac{dU_M}{dT}, \quad (2.52)$$

где U_M – внутренняя энергия одного моля вещества. Производная по температуре в (2.52) берется при условии постоянства объема, она является частной. Такие производные принято записывать в виде:

$$C_V = \left(\frac{\partial U_M}{\partial T} \right)_V \quad \text{или} \quad C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V. \quad (2.53)$$

Внутренняя энергия определена с точностью до константы, т. к. в термодинамике всегда рассматривается изменение этой величины в различных процессах. Поэтому из (2.52) или (2.53) следует:

$$U = \nu C_V T, \quad \nu = \frac{m}{\mu}. \quad (2.54)$$

Для изобарного процесса первый закон термодинамики имеет вид $\partial Q_p = dU + p dV$. Разделим это уравнение на dT , получим:

$$\frac{\partial Q_p}{dT} = \nu C_p = \nu C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (2.55)$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа, найдем $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \nu R / p$, тогда $\nu C_p = \nu C_V + \nu R$. После сокращения это уравнение приобретает вид:

$$C_p = C_V + R \quad (2.56)$$

Его называют уравнением Майера. Подставляя в (2.53) формулу (2.15), учитывая (2.56), получим:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (2.57)$$

Здесь i – число степеней свободы молекулы газа.

10.3 Основные изопроцессы в идеальном газе

Изопроцессом называется термодинамический процесс, происходящий с газом при неизменном значении какого-либо его параметра. Рассмотрим изопроцессы в идеальном газе.

1. Изобарный процесс. Уравнение процесса можно получить из уравнения Менделеева-Клапейрона при $p = const$.

$$V = \frac{\nu R}{p} T = const \times T. \quad (2.58)$$

На диаграмме V, T процесс имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Работа в изобарном процессе:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (2.59)$$

2. Изохорный процесс. Аналогично получаем уравнение процесса при $V = const$:

$$P = \frac{\nu R}{V} T = const \times T. \quad (2.60)$$

На диаграмме p, T процесс имеет вид прямой, проходящей через начало координат. При неизменном объеме работа газа равна нулю.

3. Изотермический процесс. Уравнение процесса при $T = const$ имеет вид:

$$pV = \nu RT = const. \quad (2.61)$$

На диаграмме p, V изотермический процесс изображается гиперболой $p \sim \frac{1}{V}$.

Найдем работу газа в этом процессе:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.62)$$

4. Адиабатический процесс. Такой процесс характеризуется отсутствием теплообмена с внешней средой. В течение процесса постоянной остается энтропия S . Найдем уравнение процесса. Согласно первому закону термодинамики при $\delta Q = 0$:

$$p dV = -\nu C_V dT. \quad (2.63)$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона: $p dV + V dp = \nu R dT = \nu C_V dT \left(\frac{R}{C_V} \right)$, откуда выражаем $\nu C_V dT$ и подставляем в (2.63). С учетом (2.56), получаем:

$$C_P p dV + C_V V dp = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем. Окончательно приходим к уравнению адиабатического процесса:

$$PV^\gamma = const, \quad (2.64)$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$ – показатель адиабаты. Его можно представить через i – число степеней свободы молекулы $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1 + \frac{2}{i}$. Работа в адиабатическом процессе равна:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (2.65)$$

5. Политропический процесс. Этот процесс происходит с газом при постоянной теплоемкости $C = const$. Представим $\delta Q = \nu C dT$, тогда первый закон термодинамики примет вид $\nu C dT = \nu C_V dT + p dV$ или

$$\nu(C - C_V) dT - p dV = 0. \quad (2.66)$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона получаем:

$$p dV + V dp = \nu R dT. \quad (2.67)$$

Умножим (2.66) на R и учтем (2.67). Тогда получаем: $(C - C_V)(p dV + V dp) - p R dV = 0$. Раскрывая скобки, деля все уравнение на PV , получаем:

$$(C - C_V - R) \frac{p dV}{V} + (C - C_V) \frac{dp}{p} = 0. \quad (2.68)$$

Принимая во внимание уравнение Майера, интегрируем (2.68). Получаем в результате:

$$pV^n = const, \quad (2.69)$$

где $n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$ – показатель политропы.

Работа в политропическом процессе имеет вид, подобный (2.65):

$$A = \frac{P_1 V_1}{n - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right). \quad (2.70)$$

Следует заметить, что все рассмотренные в п. 1-4 процессы являются частным случаем политропического процесса. В каждом из них теплоемкость и n принимают частные значения, согласно таблице.

Таблица 1

Процесс	Изобарный	Изохорный	Изотермический	Адиабатический
n	0	∞	1	γ
C	C_P	C_V	∞	0

10.4 Обратимые и необратимые процессы.

Обратимым называют процесс перехода термодинамической системы из одного состояния в другое, который допускает возможность ее возвращения в первоначальное состояние через ту же последовательность промежуточных состояний без остаточных изменений в окружающей среде.

Необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.

Все реальные процессы протекают с конечной скоростью. Они сопро-

вождаются трением, диффузией и теплообменом при конечной разности между температурами системы и внешней среды. Следовательно, они неравновесны и необратимы.

Всякий необратимый процесс в прямом направлении протекает самопроизвольно а для осуществления его в обратном направлении в исходное состояние требуется компенсирующий процесс во внешних телах, в результате которого состояния этих тел оказываются отличными от первоначальных. Например, процесс выравнивания температур у соприкасающихся горячего и холодного тел идет самопроизвольно. Для осуществления обратного перехода необходимы компенсирующие процессы во внешних телах, обуславливающие, например, работу холодильной машины.

Необратимые процессы в силу их неравновесности нельзя изображать на термодинамической диаграмме. Это можно делать лишь условно. Условность такого изображения заключается в том, что в действительном процессе система проходит не через те точки, которые отмечены на кривой процесса на диаграмме.

10.5 Энтропия

Энтропией S называется функция состояния системы, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества теплоты, сообщенного системе, к ее термодинамической температуре:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.71)$$

Множитель T^{-1} является интегрирующим для δQ .

Энтропия является аддитивной функцией. Энтропия тела может быть определена с точностью до константы интегрирования.

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} + const. \quad (2.72)$$

где интегрирование проводится по обратимому процессу.

Найдем изменение энтропии идеального газа. Из (2.71) и первого закона термодинамики:

$$\frac{\delta Q}{T} = \nu C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV. \quad (2.73)$$

Заменяя $\frac{p}{T}$ согласно уравнению Менделеева-Клапейрона на $\frac{\nu R}{V}$, после интегрирования получим:

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left(\nu C_V \frac{dT}{T} + \nu \frac{R}{V} dV \right) = \nu \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (2.74)$$

В статистической физике дается более подробное понятие энтропии.

Самое детальное описание макроскопической системы можно сделать, задав в каждый момент времени значения координат и компонент импульсов всех молекул. Однако сделать это совершенно точно нельзя. Дело в том, что имеются квантовые ограничения на точность задания координат и скоростей молекул. В соответствующем разделе физики будут рассматриваться так называемые соотношения неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \approx h, \Delta y \Delta p_y \approx h, \Delta z \Delta p_z \approx h. \quad (2.75)$$

Здесь Δx , Δy , Δz , Δp_x , Δp_y , Δp_z – неточности (неопределенности) координат и компонент импульса, h – постоянная Планка ($\sim 10^{-34}$ Дж·с). Наиболее точное описание системы молекул можно сделать так. Введем воображаемое шестимерное пространство, по осям которого будем отсчитывать три координаты и три проекции импульса. Разобьем его на ячейки, объемом $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \approx h^3$ каждая. Задание координат и импульса молекулы означает расположение ее в определенной такой ячейке. Задавая распределение всех молекул по ячейкам, можно наиболее точно описать микроскопическое состояние системы. Ясно, что каждое макросостояние, которое можно описать небольшим количеством термодинамических величин, на самом деле может быть представлено большим количеством Ω микросостояний (распределением молекул по ячейкам). Величина Ω называется статистическим весом (или термодинамической вероятностью). Эта величина оказывается колоссально большой. Больцманом было показано, что энтропия системы связана с ее статистическим весом:

$$S = k \ln \Omega. \quad (2.76)$$

где k – постоянная Больцмана.

10.6 Циклические процессы. Теорема Карно.

Циклическим называется термодинамический процесс, по окончании которого система возвращается в исходное состояние. На любой диаграмме такому процессу соответствует замкнутая линия.

Тело, совершающее круговой процесс (цикл) и обменивающееся энергией с другими телами, называется рабочим телом.

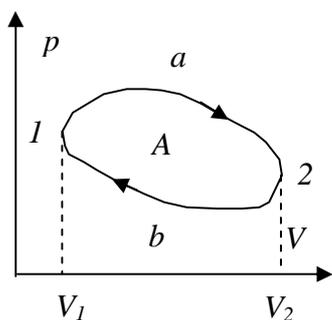


Рис. 2.5

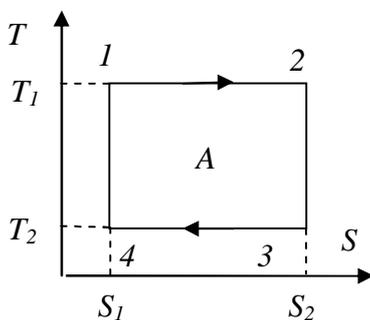


Рис. 2.6

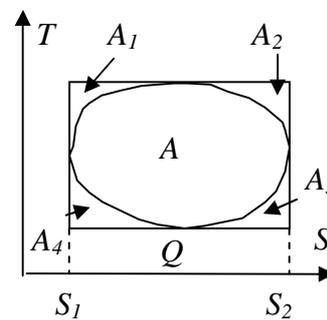


Рис. 2.7

На диаграмме P, V процесс расширения газа показан кривой $1a2$ (рис. 2.5). При этом газ получает от нагревателя количество теплоты Q_1 . Сжатие газа происходит по кривой $2b1$, здесь он отдает холодильнику количество теплоты Q_2 . Работа газа $A = Q_1 - Q_2$. Эта величина положительна, если ход цикла происходит по часовой стрелке (прямой цикл). В обратном цикле с обходом против часовой стрелки работа отрицательна.

Коэффициентом полезного действия (кпд) называется величина

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2.77)$$

Цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, называется циклом Карно. На диаграмме T, S он представляется прямоугольником (рис. 2.6). На отрезке $1-2$ тело получает количество теплоты $T_1(S_2 - S_1)$, на отрезке $3-4$ отдает количество теплоты $T_2(S_2 - S_1)$. Работа равна площади треугольника $A = Q_1 - Q_2$. Легко найти кпд цикла Карно:

$$\eta_K = 1 - \frac{T_2(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2.78)$$

Покажем, что цикл Карно имеет максимальный кпд по сравнению с любым другим циклом, работающим при тех же температурах T_1 и T_2 нагревателя и холодильника. Как видно из рис. 2.7, одновременно изображающего оба цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q + A + A_3 + A_4}, \quad \eta_K = \frac{A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{Q + A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}.$$

Взяв отношение $\frac{\eta}{\eta_K}$ находим, что оно меньше 1.

$$\frac{\eta}{\eta_K} < \frac{A(Q + A + A_3 + A_4)}{(A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4)(Q + A + A_3 + A_4)} < \frac{A}{A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4} < 1. \quad (2.79)$$

Тем самым мы показали, что справедлива теорема, доказанная Карно. Термический кпд цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Кроме того, кпд любого обратимого цикла η не может превосходить кпд цикла Карно, проведенного между экстремальными температурами рабочего тела в рассматриваемом цикле. Можно также показать, что кпд любого необратимого цикла также меньше кпд соответствующего цикла Карно.

10.7 Цикл паросиловой установки

Схема паросиловой установки представлена на рис. 2.8. Рабочее тело – вода – находится в питательном баке A , где давление равно атмосферному. Питательным насосом B вода подается в котел C , здесь происходит превращение воды в пар. В котле получается насыщенный пар, далее он поступает в перегреватель D , где он подсушивается и перегревается. Затем по паропрово-

ду пар подается в двигатель E , где происходит его расширение. В некоторых случаях после расширения в двигателе пар выходит в атмосферу, а в питательный бак поступает новое количество воды. Давление отработанного пара в этом случае равно атмосферному. Однако экономически выгодно производить расширение рабочего тела до минимально возможного давления. Для этого к выходной части двигателя присоединяется конденсатор F , в котором давление порядка 0,1 ат. В конденсаторе пар конденсируется путем отнятия от пара скрытой теплоты парообразования. Внутри конденсатора имеется трубка, через которую при помощи насоса K циркулирует холодная вода из какого-либо водоема. Получившаяся из пара вода – конденсат – стекает в нижнюю часть конденсатора и далее подается конденсатным насосом G в питательный бак.

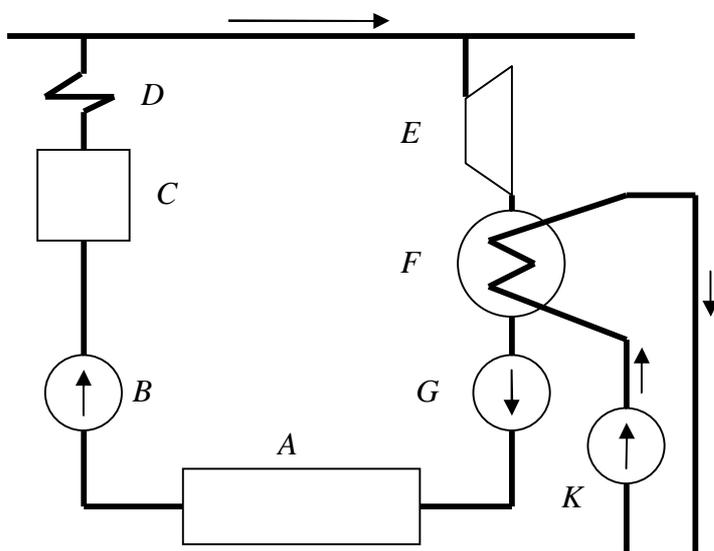


Рис. 2.8

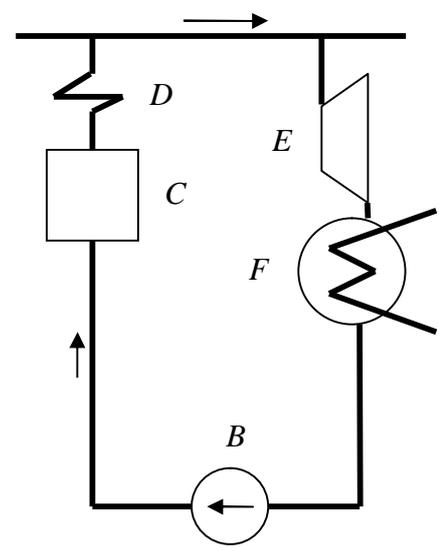


Рис. 2.9

Для рассмотрения термодинамических процессов можно несколько упростить схему, как это показано на рис. 2.9. Система обозначений здесь та же. Изобразим изменения состояния рабочего тела в паросиловой установке на P - V диаграмме (рис. 2.10). Точка 3 изображает состояние конденсата в конденсаторе. Он имеет температуру насыщения, соответствующую давлению пара в конденсаторе. В насосе вода сжимается до давления в котле. Ввиду малой сжимаемости воды объем и температура остаются близкими к постоянным. Теперь состояние воды изобразится точкой 4. В таком состоянии вода подается в котел, где она нагревается до точки кипения 5. Затем происходит процесс парообразования (пря-

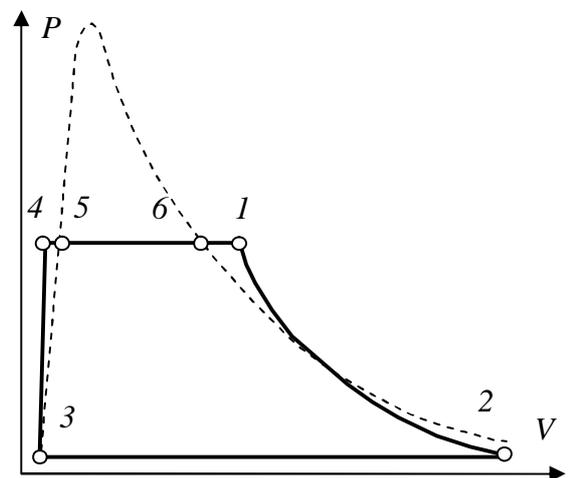


Рис. 2.10

мая 5-6) и далее перегрев пара до состояния, обозначенного точкой 1. Перегретый пар поступает в двигатель, в котором происходит его расширение (кривая 1-2). Далее пар поступает в конденсатор. Линия 2-3 изображает процесс конденсации пара при постоянном давлении.

Этот цикл на диаграмме $T-S$ имеет вид, представленный на рис. 2.11. Начальное состояние рабочего тела (конденсата) изображается точкой 3. Изменение состояния рабочего тела в насосе происходит так, что ни температура, ни энтропия воды почти не изменяются, и ее состояние на выходе из насоса (точка 4) совпадает с состоянием в точке 3. Нагревание воды в котле при постоянном давлении изображается изобарой 4-5. Точка 5 изображает состояние воды в котле при температуре кипения. Процесс парообразования, протекающий при постоянных температуре и давлении, изображается прямой 5-6. Перегрев пара при постоянном давлении изображается изобарой 6-1. Точка 1 изображает состояние пара на выходе его из перегревателя парового котла. Адиабатное расширение изображается прямой 1-2. Расширение заканчивается в точке 2, лежащей на той же изобаре, что и точка 3, поскольку происходящий в дальнейшем процесс конденсации пара идет при постоянном давлении. Цикл заканчивается в точке 3 и далее повторяется.

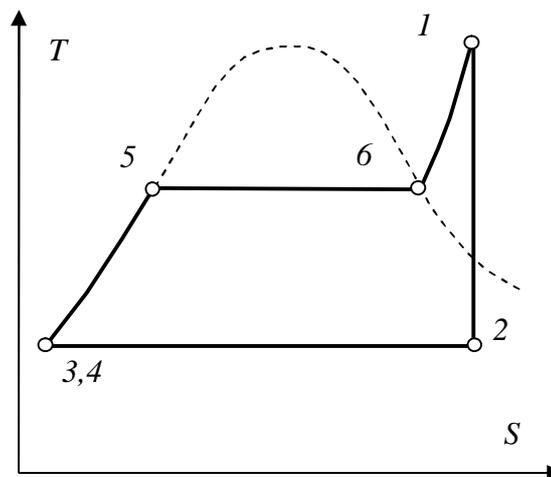


Рис. 2.11

Описанный цикл простейшей паросиловой установки называется циклом Ренкина.

10.8 Второй закон термодинамики.

Первый закон термодинамики, являющийся законом сохранения и превращения энергии, не позволяет определять направление протекания термодинамических процессов. Обобщение результатов многочисленных экспериментов привело к установлению второго закона термодинамики. Существует несколько эквивалентных его формулировок.

1. Формулировка Клаузиуса. *Невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход теплоты от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому.*

2. Формулировка Кельвина. *Невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества теплоты и превращение этой теплоты в работу.* Это положение часто формулируют так: невозможен вечный двигатель второго рода – периодически действующее устройство, которое получало бы теплоту от резервуара и полностью превращало бы ее в работу.

3. *Энтропия изолированной системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать:*

$$dS \geq 0. \quad (2.80)$$

Эта формулировка вытекает из статистического смысла энтропии и формулы Больцмана (2.76). Стремясь к равновесию, система переходит к наиболее вероятному состоянию. Оно характеризуется наибольшим набором микросостояний, отвечающих определенным, неизменным во времени внешним условиям, т. е. наибольшему статистическому весу Ω .

Из второго закона термодинамики следует, что в необратимом элементарном процессе

$$dS > \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.81)$$

В обратимом процессе в (2.81) следует ставить знак равенства. Таким образом, основное соотношение термодинамики, объединяющее в себе первый и второй законы, можно записать на основе (2.81) в виде:

$$TdS \geq dU + \delta A. \quad (2.82)$$

Для необратимых процессов в (2.82) записывают неравенство, для обратимых – равенство.

10.9 Третий закон термодинамики.

В любых обратимых изотермических процессах, совершаемых между двумя равновесными состояниями при температурах, приближающихся к абсолютному нулю, изменение энтропии ΔS стремится к нулю:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0. \quad (2.83)$$

Эта теорема, установленная Нернстом, называется третьим законом термодинамики.

В формулировке Планка он записывается так. *При стремлении термодинамической температуры тел к нулю их энтропия обращается в нуль.* Это позволяет константу в (2.72) при интегрировании по температуре от 0 до T считать равной нулю. При $T \rightarrow 0$ теплоемкости C_p и C_v , коэффициент объемного расширения $\partial V / \partial T$ также стремятся к нулю. Из теоремы Нернста следует, что невозможен такой термодинамический процесс, который привел бы к охлаждению системы до температуры $T = 0$.

10.10 Термодинамические потенциалы.

Широкое распространение в термодинамике получил метод исследования, развитый Гиббсом. Он основан на использовании так называемых термодинамических потенциалов – таких функций независимых макроскопических термодинамических параметров, которые полностью задают тер-

модинамическое состояние системы. Если известно аналитическое выражение любого термодинамического потенциала через независимые параметры системы, то можно в явной форме определить все ее термодинамические величины. Все термодинамические потенциалы аддитивны, кроме того, их дифференциалы являются полными, значит, термодинамические потенциалы сами являются функциями состояния системы. В простых системах используют следующие термодинамические потенциалы:

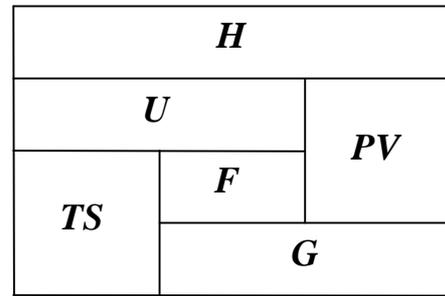


Рис. 2.12

внутренняя энергия U ;
свободная энергия (энергия Гельмгольца)

$$F = U - TS; \quad (2.84)$$

энтальпия (тепловая функция)

$$H = U + PV; \quad (2.85)$$

энергия Гиббса (потенциал Гиббса)

$$G = U + PV - TS; \quad (2.86)$$

Соотношение между ними удобно представить в графическом виде (рис. 2.12).

1. Для дифференциала внутренней энергии в обратимых процессах справедливо соотношение, полученное из (2.82):

$$dU = TdS - pdV, \quad (2.87)$$

из чего следует, что независимыми переменными для U являются S и V .

- В изохорном процессе $dU = \delta Q_V$.
- В адиабатическом процессе $dU = -\delta A_S$.
- $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$.

2. Для дифференциала свободной энергии с учетом (2.87) справедливо соотношение

$$dF = -SdT - pdV, \quad (2.88)$$

из чего следует, что независимыми переменными для F являются T и V .

- В изотермическом процессе $dF = -\delta A_T$.
- $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V; \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$.
- В необратимом процессе при постоянных T и V , разделив (2.82) на изменение времени dt и перегруппировав слагаемые, получим:

$$\frac{d(U - TS)}{dt} = \frac{dF}{dt} \leq 0.$$

В таком процессе свободная энергия уменьшается и достигает минимума в состоянии равновесия.

3. Для дифференциала энтальпии с учетом (2.87) справедливо соотношение:

$$dH = TdS + Vdp, \quad (2.89)$$

из чего следует, что независимыми переменными для H являются S и p :

- В изобарном процессе $dH = \delta Q_p$.
- $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$; $V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$.

4. Для дифференциала энергии Гиббса с учетом (2.87) справедливо соотношение:

$$dG = Vdp - SdT, \quad (2.90)$$

из чего следует, что независимыми переменными для G являются p и T .

- $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$; $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$.
- В необратимом процессе при постоянных p и T аналогично получаем:

$$\frac{d(U + PV - TS)}{dt} = \frac{dG}{dt} \leq 0.$$

В таком процессе энергия Гиббса уменьшается и достигает минимума в состоянии равновесия.

10.11 Межмолекулярное взаимодействие. Уравнение состояния реальных газов.

Молекулы в реальном газе взаимодействуют между собой. Это взаимодействие начинает проявляться на расстоянии порядка 10^{-9} м в виде притяжения. На расстоянии порядка 10^{-10} м притяжение сменяется взаимным отталкиванием. Силы притяжения и отталкивания между молекулами зависят от расстояния между ними по степенному закону $F \sim r^{-n}$, где $n \approx 13$ для отталкивания и $n \approx 7$ для притяжения. Кривая зависимости энергии межмолекулярного взаимодействия от расстояния между центрами молекул приведе-

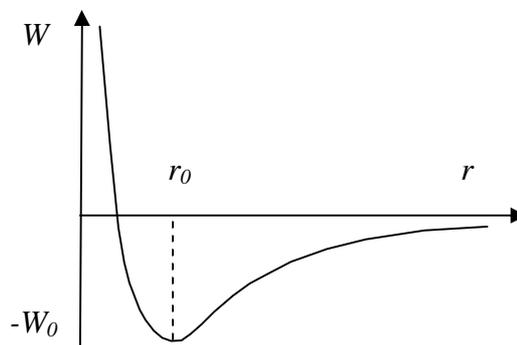


Рис. 2.13

на на рис. 2.13. Минимуму кривой соответствует расстояние r_0 . Такое расстояние характерно для структуры жидкостей и кристалла. Агрегатное состояние вещества определяется соотношением между тепловой энергией молекул $\sim kT$ и глубиной потенциальной ямы W_0 . Газообразному состоянию соответствует соотношение $kT > W_0$, жидкому $kT \leq W_0$, твердому $kT < W_0$.

Идеальный газ является моделью, которая хорошо описывает состояние газа в пределе высоких температур и низких давлений. В остальных случаях имеются более или менее значительные отклонения. Во многих случаях уравнение состояния идеального газа Менделеева-Клапейрона является непригодным. Для описания реальных газов были предложены соответствующие уравнения состояния.

Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса для одного моля газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT, \quad (2.91)$$

где p – давление, V_m – молярный объем, T – термодинамическая температура. Константа b определяет суммарный объем, занятый всеми молекулами газа вследствие конечности их размеров, а поправка $\frac{a}{V^2}$ – некоторое «внутреннее» давление, обусловленное взаимным притяжением молекул. Для ν молей уравнение (2.91) имеет вид:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) \left(\frac{V}{\nu} - b \right) = RT. \quad (2.92)$$

Уравнения (2.91) и (2.92) гораздо лучше описывают поведение реальных газов.

Более точными уравнениями состояния реальных газов являются:

- Первое и второе уравнения Дитеречи:

$$p(V_m - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV_m}\right);$$

$$\left(p + \frac{a}{V_m^{5/3}} \right) (V_m - b) = RT.$$

- Уравнение Бергло:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2 T} \right) (V_m - b) = RT.$$

- Вириальная форма:

$$PV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \frac{D}{V_m^3} + \dots \right),$$

где B, C, D – функции температуры, называемые вириальными коэффициентами.

10.12 Изотерма реального газа.

Изотермы реального газа, полученные экспериментальным путем, приведены на рис. 2.14. при температурах $T < T_3$ давление газа возрастает при его сжатии в соответствии с линией $2B$. В точке B газ начинает конденсироваться в жидкость, область BC соответствует сосуществованию двух фаз – жидкости и ее насыщенного пара. Соотношение их масс можно определить по правилу рычага:

$$\frac{m_{ж}}{m_n} = \frac{MB}{MC}. \quad (2.93)$$

В точке C весь пар превращается в жидкость, давление которой зависит от объема в соответствии с кривой CD .

Если на изотермах, построенных для различных температур, соединить все точки типа C и B одной кривой, получим колоколообразную линию (штриховая на рис. 2.14), отделяющую область сосуществования двух фаз. Вершина этой области – точка K – соответствует исчезновению горизонтального участка на изотерме. Эта точка называется критической, ей отвечает критическое состояние вещества с вполне определенным критическим давлением и объемом. Изотерма, проходящая через точку K , называется критической.

Диаграмма состояния в координатах P, V (рис. 2.15) состоит из однофазных областей: $Ж$ – жидкость, $Г$ – газ, $П$ – пар (газ при температуре ниже критической) и двухфазной области $Ж+П$ равновесие жидкости и ее насыщенного пара.

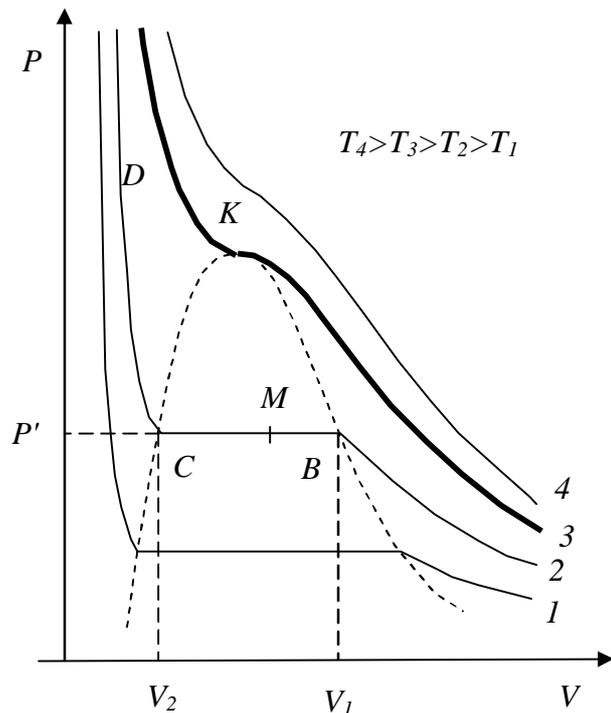


Рис. 2.14

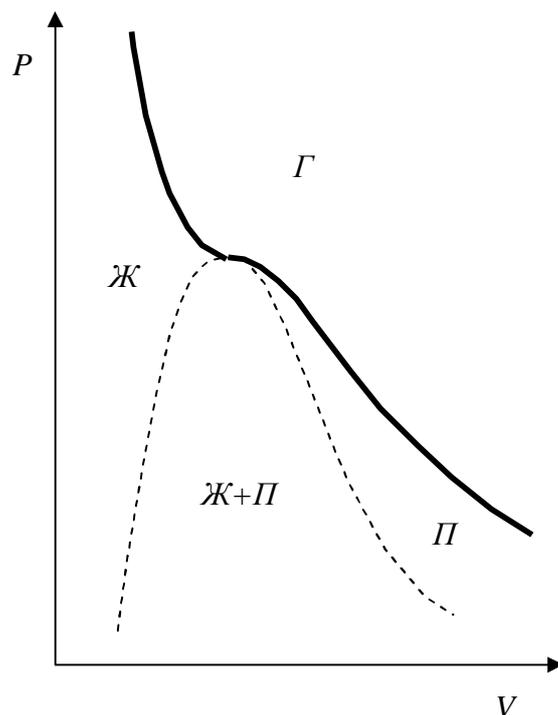


Рис. 2.15

Уравнение Ван-дер-Ваальса (2.91) неплохо описывает изотерму реального газа, по крайней мере, на качественном уровне. Две изотермы Ван-дер-Ваальса приведены на рис. 2.16. Если записать (2.91) в каноническом виде, то получим уравнение третьей степени. При определенных значениях p и T такое уравнение может иметь только один или три действительных корня. Горизонтальный участок AB проводится на изотерме так, чтобы площади фигур под ним и над ним, ограниченных изотермой были равны (правило Максвелла). Состояния $A-2'$ соответствуют пересыщенному пару и являются метастабильными. При появлении неоднородности в системе (центра конденсации) пар быстро переходит в жидкость $2' \rightarrow 2$, так что состояние становится двухфазным. Аналогично участок $B-3'$ соответствует перегретой жидкости. Парообразование в таком метастабильном состоянии также начинается при появлении неоднородности и происходит по пути $3'-3$. Состояния $2'-3'$ являются абсолютно неустойчивыми и никогда не реализуются в природе.

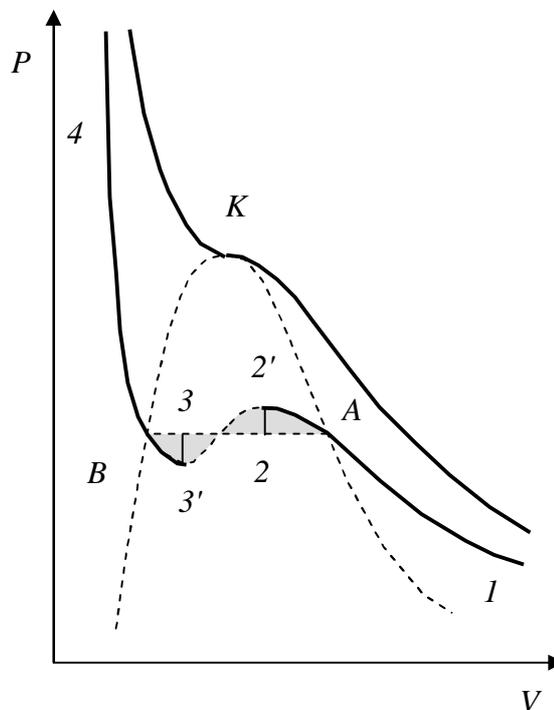


Рис. 2.16

В критической точке выполняются равенства:

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_K = 0; \quad \left(\frac{d^2 p}{dV^2} \right)_K = 0. \quad (2.94)$$

Из (2.94) с использованием (2.92) можно найти критические значения объема, давления и температуры:

$$V_n = 3vb; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8av}{27bR}. \quad (2.95)$$

Произведение $p_k V_k = \frac{3RT_k}{8}$ для этого случая и аналогичное произведение $p_k V_k = RT_k$ для идеального газа существенно различаются. Вблизи критического состояния наблюдают особые критические явления, которые связаны со значительным возрастанием флуктуаций плотности вещества.

Введя безразмерные параметры $\Theta = T/T_k$, $\pi = p/p_k$, $\omega = V/V_k$, уравнение Ван-дер-Ваальса можно представить в виде:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \left(\omega - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \Theta. \quad (2.96)$$

Это уравнение называют приведенным уравнением состояния. Оно не содержит постоянных, характеризующих конкретное вещество, поэтому приближенно справедливо для всех веществ. Из него следует закон соответственных состояний: *если два приведенных параметра двух веществ одинаковы, то и третьи их параметры также одинаковы.*

10.13 Диаграмма состояния. Тройная точка.

При одних и тех же значениях температуры и давления могут существовать два или три состояния вещества, отличающиеся свойствами, например, агрегатные состояния вещества: газообразное, жидкое и твердое. Однородное по физическим свойствам состояние вещества называется фазой. В условиях равновесия это гомогенная часть гетерогенной системы, отделенная от других частей поверхностью раздела, на которой свойства изменяются скачком. Условия равновесия и сосуществования различных фаз можно изображать кривыми равновесия на диаграммах p, V или p, T , которые называются фазовыми диаграммами.

На рис. 2.17 приведена диаграмма состояния воды. Кривая равновесия газ-жидкость RK обрывается в точке K . Возможен переход от газа к жидкости в обход этой точки. При этом изменение физических свойств системы происходит непрерывно. Равновесие между твердой и жидкой фазой, а также между твердой и газообразной фазой изображены линиями RB и RA . При переходе системы через такие кривые исчезает или появляется характерная для твердой (кристаллической) фазы симметрия. Поэтому такие кривые не могут обрываться (нельзя симметрию убрать постепенно, она либо есть, либо ее нет). Кривые либо уходят на бесконечность, либо переходят в кривые равновесия с другой фазой. На диаграммах можно изображать кривые равновесия различных твердых фаз между собой, соответствующие, например, различной структуре кристаллических решеток. Точка R соответствует равновесию трех фаз. Она называется тройной точкой. Ей соответствуют определенные значения температуры и давления.

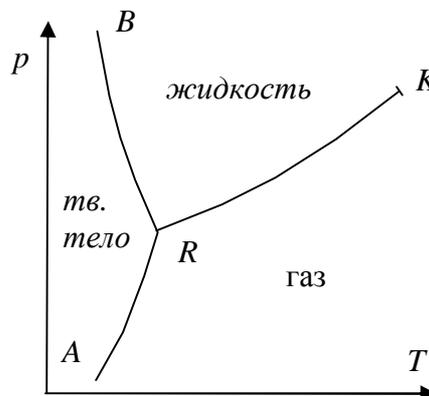


Рис. 2.17

10.14 Фазовые переходы первого рода.

Если нарушается хотя бы одно из условий равновесия, в системе начинается переход вещества из одной фазы в другую. Такие переходы называются фазовыми переходами, они бывают разных типов.

К фазовым переходам первого рода относятся переходы, характеризующиеся следующими свойствами.

1. При фазовом переходе поглощается или выделяется скрытая теплота перехода.

2. Скачком изменяются первые производные от энергии Гиббса – энтропия S и объем V , согласно (2.90). Поэтому скачком изменяется также внутренняя энергия U , энтальпия H и свободная энергия F . Энергия Гиббса в точке перехода остается непрерывной, лишь изменяется наклон изображающей ее кривой в зависимости от T или P .

Примерами фазовых переходов первого рода являются: плавление и кристаллизация, испарение и конденсация, сублимация и конденсация пара в твердую фазу, переход из одной кристаллической модификации в другую, переход проводника из нормального состояния в сверхпроводящее в магнитном поле и др.

Фазовый переход первого рода описывается уравнением Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}. \quad (2.97)$$

Здесь λ – удельная скрытая теплота фазового перехода, v_1 и v_2 – удельные объемы (объемы единицы массы) фаз. Появление величины λ связано с изменением энтропии $\lambda = T\Delta S$ единицы массы фазы. Наклон кривой равновесия $P(T)$ определяется величиной и знаками λ и Δv . Например, при плавлении обычно $\lambda > 0$ и $\Delta v > 0$, поэтому $dP/dT > 0$, угол наклона кривой равновесия к оси T острый. Некоторые вещества, такие как вода, висмут, чугун, при плавлении уменьшают объем. Например, лед, имеющий больший удельный объем и меньшую плотность, плавает в воде. В этих случаях $\lambda > 0$, $\Delta v < 0$ и угол наклона кривой равновесия к оси T тупой (см. рис. 2.17).

10.15 Фазовые переходы второго рода.

Фазовые переходы второго рода характеризуются следующими признаками.

1. Скрытая теплота перехода равна нулю: $\lambda = 0$.
2. Вторые производные энергии Гиббса испытывают скачек. Поскольку аргументами энергии Гиббса являются два параметра – p и T , таких производных существует три. Это

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = -\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

С ними связаны следующие величины: удельная теплоемкость $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$,

коэффициент теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, изотермический коэффи-

циент сжатия $\gamma = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. Первые производные при фазовых переходах второго рода остаются непрерывными.

Примерами таких переходов являются: превращение ферромагнетика в парамагнетик, сегнетоэлектрика в параэлектрик, переход проводника из нормального состояния в сверхпроводящее в отсутствие магнитного поля, переход жидкого гелия (гелий-I) в сверхтекучее состояние (гелий-II).

Фазовые переходы второго рода описываются уравнениями Эренфеста:

$$\Delta C_P = -T \left(\frac{dP}{dT} \right)^2 \cdot \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{dP}{dT} \cdot \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

На рис. 2.18 приведена диаграмма состояния гелия. Она обладает особыми свойствами.

- Отсутствует тройная точка;
- При давлении $P < 24$ атм гелий не кристаллизуется вплоть до температуры $T = 0$.
- Критические параметры ${}^4\text{He}$ составляют $T_k = 5,19$ К, $P_k = 2,26$ атм. При нормальном давлении гелий ожижается при $T = 4,2$ К.

У жидкого гелия-II обнаружено явление сверхтекучести – полное отсутствие вязкости при течении его сквозь очень узкие капиллярные трубки (с радиусом $\sim 10^{-7}$ м). Переход $\text{HeI} \rightarrow \text{HeII}$ является фазовым переходом второго рода. Явление сверхтекучести экспериментально обнаружено П.Л. Капицей, а его теория создана Л.Д. Ландау.

Свойства гелия-II можно описать двухкомпонентной моделью, согласно которой он представляет собой смесь двух взаимопроникающих жидкостей – нормальной и сверхтекучей. В первой компоненте имеются тепловые возбуждения, а значит и тепловая внутренняя энергия. Эта компонента обладает вязкостью. Вторая компонента не имеет тепловых возбуждений, внутренней энергии и вязкости, она представляет коллектив (конденсат) сильно взаимодействующих частиц. При $T = 0$ весь гелий-II является сверхтекучим. С увеличением температуры возникает и увеличивается доля нормальной компоненты.

Теплопроводность гелия-II аномально высока. Она в сотни раз превосходит теплопроводность металлов при комнатных температурах. При стационарной теплопроводности в гелии-II имеются два противонаправленных потока жидкости – нормальная движется от мест с высокой к местам с низкой температурой, перенося энергию. Сверхтекучая движется в обратном направлении, восполняя убыль вещества.

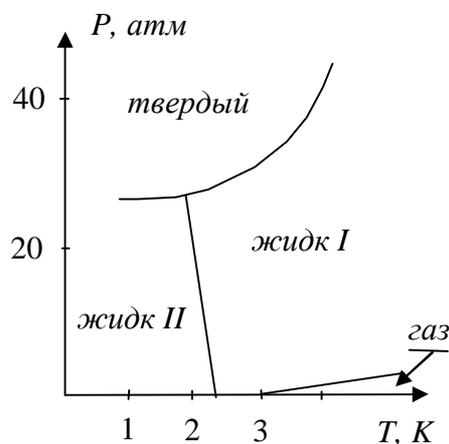


Рис. 2.18

§ 11 Конденсированное состояние

11.1 Строение жидкости

Жидкое состояние вещества характеризуется определенным объемом, образует поверхность раздела, имеет очень низкую сжимаемость и не сохраняет своей формы. Строение жидкости изотропно в мезоскопическом масштабе, за исключением жидких кристаллов. Расположение молекул в жидкости характеризуется ближним порядком, сохраняющимся в пределах одного - двух межатомных расстояний. На больших расстояниях упорядоченность атомного строения нарушается, так что дальний порядок отсутствует. Современные представления о жидком состоянии сводятся к следующему. Атом жидкости, занимая определенное упорядоченное положение среди своих ближайших соседей, совершает тепловые колебания с частотой $\sim 10^{12}$ Гц в течение некоторого времени τ , называемого временем оседлой жизни. Затем атом совершает спонтанный переход на расстояние, сравнимое с межатомным, меняя свое ближайшее окружение. В новом положении он также имеет определенную упорядоченность атомной структуры соседей и совершает тепловые колебания, затем переходит в новое положение и т. д. Таким образом, существует постоянно происходящая миграция атомов, которая и обуславливает текучесть жидкости.

Поверхностный слой жидкости обладает особыми свойствами, т. к. его молекулы имеют вблизи границ раздела ближайших соседей в жидкости только с одной стороны. Радиус молекулярного действия составляет несколько межатомных расстояний. Данная молекула взаимодействует с молекулами, попадающими в сферу с таким радиусом. На

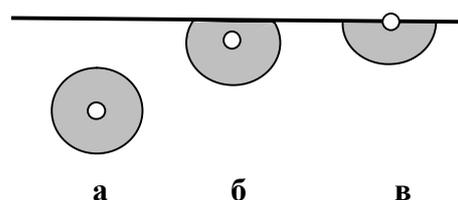


Рис. 2.19

расстояниях, больших равновесного r_0 взаимодействие молекул сводится к их притяжению. В объеме жидкости суммарная сила, действующая на молекулу равна нулю (рис. 2.19а). Вблизи поверхности возникает суммарная сила, направленная в объем (рис. 2.19б, 2.19в). Т. к. часть молекул с отрицательной энергией взаимодействия с данной молекулой отсутствует, вблизи поверхности имеется слой толщиной, примерно равной радиусу молекулярного действия, с повышенной энергией молекул в нем. Такой слой подобен пленке, сжимающей жидкость. Величина такого молекулярного давления очень высока, например, в случае воды она равна 10^4 атм. Поэтому, чтобы сжать сколько-нибудь заметно воду, нужны давления такого же порядка величины.

Удельную (приходящуюся на единицу площади) поверхностную энергию жидкости обозначают σ . Стремясь уменьшить энергию, жидкость всегда принимает форму с наименьшей возможной площадью поверхности. Например, в невесомости любой объем жидкости стремится принять форму шара. В условиях тяготения жидкость в сосуде имеет плоскую свободную поверхность. Поверхностный слой жидкости, таким образом, действует на ограни-

чивающий ее отрезок l с силой поверхностного натяжения $F = \sigma l$, направленной нормально к отрезку вдоль поверхности жидкости.

11.2 Смачивание. Капиллярные явления.

При контакте жидкости с поверхностью твердого тела наблюдаются явления, относящиеся к смачиванию. Такие явления обусловлены взаимодействием молекул на границе сосуществования трех фаз – твердой, жидкой и газообразной.

На единицу длины линий соприкосновения (точка 0 на рис. 2.20) действуют силы $\frac{1}{2}\sigma_{12} + \frac{1}{2}\sigma_{13} + \frac{1}{2}\sigma_{23}$. В проекции на ось x сумма сил должна равняться нулю в условиях равновесия. Отсюда можно получить значение краевого угла θ :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}}. \quad (2.98)$$

Если $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ поверхность смачивается жидкостью, если $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ – то не смачивается. При $\sigma_{23} > \sigma_{13} + \sigma_{12}$ наблюдается полное смачивание, и жидкость растекается по поверхности. В этом случае одна граница раздела твердое тело-газ заменяется на две границы раздела твердое тело – жидкость и жидкость-газ, имеющие в сумме меньшую энергию. При $\sigma_{13} > \sigma_{23} + \sigma_{12}$ получается полное несмачивание. Жидкость контактирует с твердой поверхностью в идеале в одной точке.

Явления, обусловленные свойствами поверхностного слоя жидкости с удельной энергией σ , называются капиллярными. Например, такие явления приводят к появлению добавочного давления под искривленной поверхностью жидкости (давление Лапласа):

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.99)$$

где R_1 и R_2 – радиусы главной кривизны поверхности. В случае сферической формы поверхности $R_1 = R_2 = R$ и тогда

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (2.100)$$

Очень тонкие трубки называются капиллярами. Если жидкость смачивает материал капилляра, то ее уровень поднимается в нем на высоту h . В

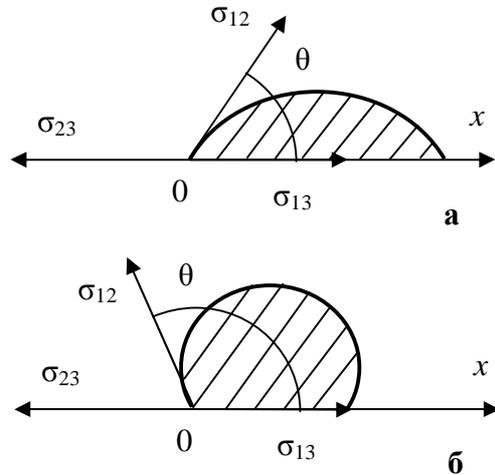


Рис. 2.20

этом случае сумма давлений Лапласа (отрицательное) и гидростатического столба высотой h равна нулю. Отсюда находим:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}, \quad (2.101)$$

где θ – угол смачивания. В случае несмачивающей жидкости выражение (2.101) дает глубину уровня жидкости в капилляре радиуса r .

Под влиянием поверхностного натяжения при возмущении поверхностного слоя в жидкости могут возникать капиллярные волны.

11.3 Симметрия кристаллов.

Большинство твердых тел в природе с точки зрения микроструктуры является кристаллическими. Кристаллы характеризуются упорядоченным внутренним строением – симметричным расположением составляющих их атомов или молекул.

Операциями симметрии называются различные геометрические преобразования, приводящие тело в совмещение с собой. Они делятся на два типа – точечные, когда хотя бы одна точка в процессе преобразования остается на месте; и пространственные, когда таких точек нет. К первым относятся следующие.

1. Поворотная ось симметрии 2, 3, 4 и 6 порядков. Порядок указывает количество самосовмещений фигуры при ее повороте вокруг оси на один полный оборот.
2. Плоскость симметрии. Она подобна зеркальной плоскости.
3. Центр симметрии, являющийся центром инверсии.
4. Инверсионные оси симметрии. Они представляют собой комбинацию поворота вокруг оси и инверсионного отражения в точке.

В случае пространственных элементов симметрии к приведенным выше добавляются параллельные переносы (трансляции) вдоль определенных направлений.

Всевозможные допустимые комбинации элементов симметрии приводят к образованию 32 точечных и 230 пространственных групп симметрии, которыми описывается все многообразие многогранников или пространственных решеток кристаллов.

Исследуя закономерности атомного строения кристаллических решеток, можно выделить определенную совокупность точек (узлов), образующих структуру, которая периодически повторяется в пространстве путем трансляции на заданные векторы. Такая совокупность узлов называется элементарной ячейкой. Таким образом, вся решетка состоит из бесконечной совокупности одинаковых элементарных ячеек. Выбор элементарной ячейки производится так, чтобы она наиболее полно отражала симметрию решетки и содержала минимальное количество узлов.

Все кристаллические структуры описываются четырнадцатью типами решеток, описанными О. Браве, отличающимися формами элементарных

ячеек и их симметрией. Они подразделяются на семь кристаллографических сингоний. В сингонию объединяются кристаллы, у которых одинаковы симметрия элементарных ячеек и соответствующая ей система координат. В различных сингониях ячейки могут иметь вид параллелепипедов с одинаковыми или различными длинами ребер, а также с углами между ними, отличными от прямых или равными им. Решетки делятся также на примитивные, у которых узлы расположены только в вершинах ячейки; базоцентрированные, у которых добавляются узлы в центрах двух противоположных граней; объемноцентрированные с узлом в центре объема и гранецентрированные с узлами в центрах всех граней.

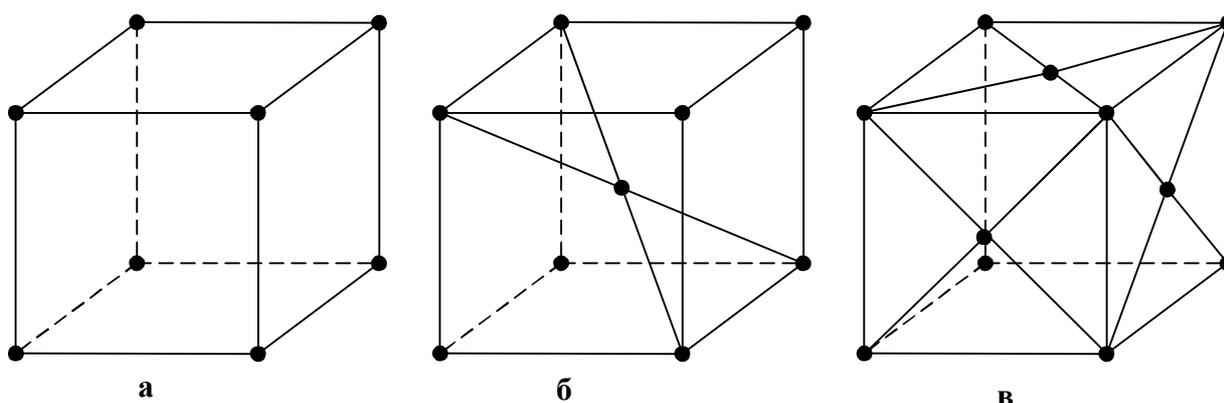


Рис. 2.21

На рис. 2.21 изображены примеры примитивной (а), объемноцентрированной – ОЦК (б) и гранецентрированной – ГЦК (в) решеток. В такие решетки кристаллизуется большинство металлов.

11.4 Аморфные твердые тела.

Наряду с кристаллическими, существуют и аморфные (стеклообразные) твердые тела. Их атомное строение подобно жидкостям, у которых отсутствует дальний порядок в расположении атомов. Значительно возрос в последние десятилетия интерес к исследованию и практическому применению аморфных металлов. Для их приготовления используют различные методы, в основе которых лежит быстрый переход металлов из жидкого или газообразного состояния в твердое. При этом затвердевание происходит настолько быстро, что атомы не успевают занять правильные положения в решетке и остаются в таких положениях, которые имели в жидком состоянии. Аморфные металлы обладают необычными магнитными, механическими, электрическими свойствами, высокой коррозионной стойкостью. Например, наряду с высокой магнитной мягкостью, эти материалы проявляют исключительно высокую механическую твердость и прочность при растяжении, в ряде случаев имеют близкий к нулю коэффициент теплового расширения. Удельное сопротивление может в несколько раз превосходить даже этот параметр у известных сплавов высокого сопротивления. Потери на вихревые токи у таких материалов, используемых в качестве сердечников трансформаторов, мини-

мальны. Вследствие высокой коррозионной стойкости они перспективны в качестве покрытий. Сочетание твердости, высокой магнитной проницаемости и нулевой магнитострикции дают возможность применения аморфных материалов для головок магнитной записи, для магнитных экранов. Их высокая чувствительность к механическим напряжениям способствует их применению в качестве датчиков напряжений. Они также используются в качестве линий задержек, управляемых электроникой.

Уникальность свойств аморфных материалов находит разнообразные приложения в технике. Процесс внедрения их в практику интенсивно расширяется.

11.5 Дефекты кристаллического строения

Рассмотренное ранее строение кристаллических тел является в значительной степени идеализированным. Реальные твердые тела неизбежно имеют отклонения от идеально правильного строения. Такие отклонения называются дефектами. Дефекты можно классифицировать по размерности – количеству измерений, в которых его размер макроскопический.

Точечные дефекты (нульмерные) во всех трех измерениях имеют атомные масштабы. К ним относятся следующие их типы.

1. вакансия – отсутствие атома в решетке;
2. межузельный атом, находящийся в неправильном положении между узлами;
3. примесный атом иного элемента, который может находиться в узле (примесь замещения) или в междоузлии (примесь внедрения);
4. скопление вакансий;
5. пара из вакансии и междоузельного атома;
6. пара атомов замещения.

Линейные дефекты (одномерные) имеют в одном направлении макроскопические размеры. К ним относятся дислокации, цепочки вакансий, дискликации и т. д. Поверхностные дефекты (двумерные) в двух направлениях макроскопичны. К ним относятся: свободная поверхность кристалла, вакансионные диски, границы между соседними разориентированными областями кристалла (зернами) и др. К объемным дефектам можно отнести поры, включения иной фазы и др.

Неотъемлемым свойством кристаллов является обязательное наличие в них точечных дефектов. Они являются термодинамически равновесными, т. к. за счет повышения энтропии уменьшают энергию Гиббса кристалла. Их концентрация связана с энтальпией образования H_0 :

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{H_0}{kT}\right). \quad (2.102)$$

Точечные дефекты способны перемещаться по кристаллу, совершая диффузионные скачки, и собираться в макроскопические образования.

11.6 Дислокации

Одним из наиболее важных типов дефектов в кристаллах с точки зрения их механических свойств являются дислокации. Образование дислокаций можно понять, прибегнув к следующей модели. Возьмем непрерывную сплошную среду со свойствами, подобными резине. Произведем в ней разрез по полуплоскости, ограниченной прямой линией. Далее получившиеся два берега сдвинем на расстояние b . Затем обе поверхности среза склеим между собой. Область вблизи ограничивающей линии будет наиболее искажена. Эта область и является моделью дислокации. Размеры сильно искаженной области вдоль линии значительно больше, чем в других направлениях. Если сдвиг перпендикулярен линии дислокации, то она называется краевой, если параллелен – винтовой. Вектор сдвига \vec{b} называют вектором Бюргерса. На рис. 2.22 изображены краевая (а) и винтовая (б) дислокации в континуальной среде. В случае кристаллов среда является дискретной, поэтому вектор Бюргерса в этом случае не может быть произвольным. В наиболее простом случае он равен постоянной решетки. На рис. 2.22в изображены атомные плоскости вблизи линии краевой дислокации. Линия дислокации является границей полуплоскости, вставленной между двумя ближайшими атомными плоскостями. Область сильно деформированного материала называется ядром дислокации. На рис. 2.22в ядро обозначено пунктиром. В ядре деформации настолько велики, что применять теорию упругости там нельзя.

Дислокации не являются термодинамически равновесными дефектами. Для их образования требуется значительная энергия, пропорциональная длине линии дислокации. Тем не менее, даже весьма совершенные чистые кристаллы содержат в себе много дислокаций. О количестве дислокаций можно судить по их плотности, определяемой как суммарная длина всех линий дислокаций в единице объема кристалла. Косвенно о плотности дислокаций можно судить по количеству точек их выхода на грань кристалла.

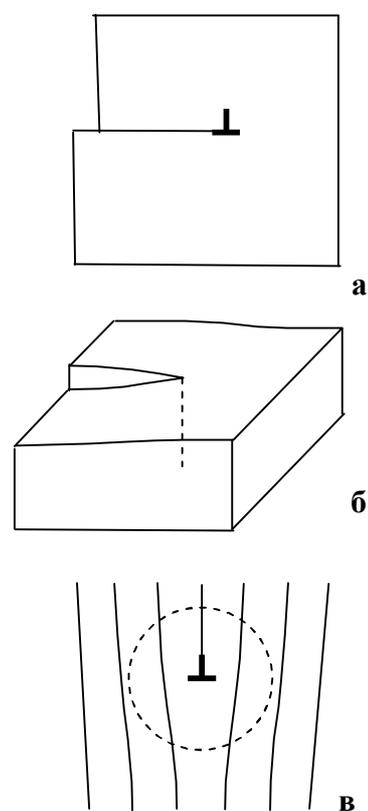


Рис. 2.22

11.7 Влияние дислокаций на физические свойства кристаллов

Дислокации оказывают существенное влияние на свойства кристалла. Например, пластическая деформация осуществляется путем движения дислокаций. Различают два их основных вида – консервативное и неконсервативное. При консервативном движении дислокация перемещается в своей плос-

кости скольжения, образуемой линией дислокации и вектором Бюргерса. После прохождения дислокации через весь кристалл происходит разрыв межатомных связей в одной плоскости и образование из соседних полуплоскостей новой плоскости. Процесс осуществляется эстафетно. После такого прохождения дислокации одна часть кристалла смещается относительно другой на одно межатомное расстояние.

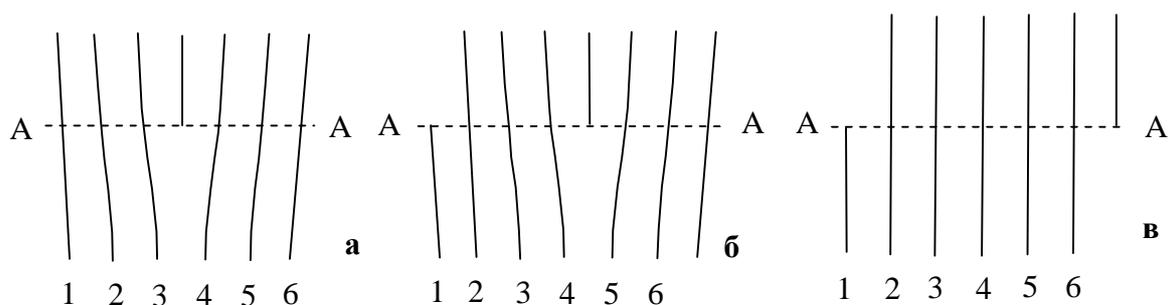


Рис. 2.23

Конфигурация на рис. 2.23а переходит в конфигурацию на рис. 2.23б, а далее на рис. 2.23в показан сдвиг верхней половины кристалла на одно межатомное расстояние при прохождении дислокации через весь кристалл. Здесь АА – плоскость скольжения. Такое движение не требует переноса вещества к дислокации. Неконсервативное движение осуществляется путем добавления к линии дислокации дополнительных атомов. При этом дислокация на рис. 2.22 2.23а переползает вниз. При удалении атомов от дислокации, она переползает вверх. В обоих случаях для неконсервативного движения необходимо перемещение атомов вещества на большие расстояния (диффузия). Всегда дислокация движется под воздействием внешней силы. Роль дислокаций и их влияние на свойства кристаллов не ограничивается описанными процессами. Большинство механических свойств кристаллов описывается с привлечением понятия дислокаций. Картина усложняется наличием, кроме рассмотренных, множества других их типов, а также взаимодействием дислокаций между собой и с другими дефектами решетки.

11.8 Поликристаллические материалы.

Подавляющее большинство материалов, имеющих кристаллическую структуру, состоит из большого числа мелких кристаллов, разориентированных друг относительно друга и соединяющихся вдоль общих поверхностей. Такие кристаллы называют кристаллитами, зернами, блоками, а поверхности – границами зерен. Большинство металлов, используемых в промышленности, в быту – такие материалы. Они называются поликристаллами. Монокристаллы (физическое тело – единый макроскопический кристалл) встречаются иногда в природе, в промышленности освоено производство некоторых веществ в монокристаллическом состоянии.

Структура, взаимная ориентация, размеры отдельных зерен определяют

пластические, прочностные, демпфирующие и другие свойства поликристаллических материалов. Существуют технологии, направленные на получение поликристаллов с определенной зернистой структурой. Определяющую роль в этой связи имеют структура и физические свойства межзеренных границ. Точное атомное их строение зачастую не известно. Поэтому для теоретического изучения границ большую роль играют различные их модели. К настоящему времени известно около полутора десятков моделей, наиболее разработанной и употребляемой из которых является модель специальных границ. Она основана на концепции совпадающих узлов, принадлежащих решеткам соседних зерен. Такие границы возникают только при разориентациях зерен с углами определенных величин. Другие границы, более общего типа, которых в неравновесных состояниях большинство, исследованы меньше. Часть их может быть описана в рамках модели несоответствующих границ, когда между положениями атомов соседних зерен нет никакой заранее установленной зависимости.

11.9 Дефектообразование в металлах и сплавах, используемых в атомной энергетике

Точечные дефекты, которые возникают при облучении быстрыми частицами, такими как протоны, нейтроны, электроны, осколки делящихся ядер, называются *радиационными дефектами*. Образовавшиеся таким путем дефекты повышают свободную энергию кристалла, поэтому они не являются равновесными. Пара дефектов вакансия – межузельный атом появляется при упругом столкновении быстрой частицы с атомом кристалла. Для появления такой пары необходимо, чтобы атому в узле решетки была передана энергия, по величине большая, чем некоторое пороговое значение E_d . Если средняя энергия связи атомов в решетке ~ 10 эВ, то $E_d \sim 25$ эВ. В случае, когда энергия смещенного межузельного атома превышает пороговое значение, он также способен инициировать образование дефектной пары. Таким образом возникает каскад атомных смещений. Вдоль пути исходной частицы появляется сильно разупорядоченная область. Среднее число смещенных атомов от одной исходной частицы с энергией E_a равно:

$$N = \frac{E_a}{2E_d}.$$

При очень высокой концентрации радиационных дефектов кристаллическая структура становится неустойчивой, вследствие чего происходит ее переход в аморфное состояние.

Радиационные вакансии, двигаясь в кристалле, могут объединяться с образованием пор. Их появление уменьшает плотность материала, происходит так называемое его радиационное распухание. *Флюэнсом* называется количество облучающих частиц, попавших на единицу площади поверхности. Металлы и сплавы, облученные при температуре в интервале 0,3 – 0,6 от температуры плавления обнаруживают почти линейное увеличение объема в

зависимости от флюэнса (например, при облучении нейтронами с флюэнсом большим 10^{21} см^{-2}). В процессе радиационного распухания объемная доля пор может достигать 10% и более.

Образующиеся при облучении точечные дефекты при определенных температурных условиях способны мигрировать к дислокациям. Осаждаясь на незавершенной полуплоскости, они вызывают переползание дислокаций и как следствие пластическую деформацию металла. Такой эффект называется радиационной ползучестью. Скорость деформации зависит от приложенного напряжения и скорости образования радиационных дефектов.

Большое количество сплавов при температурах их применения не находится в состоянии термодинамического равновесия. При использовании их в активной зоне ядерного реактора возникают значительные по величине потоки вакансий и межузельных атомов, создающие интенсивный перенос вещества. Такой перенос приводит к перераспределению компонентов, локальным изменениям концентрации твердых растворов, их пересыщению и выделению частиц второй фазы. Радиационно-стимулированные фазовые превращения существенно влияют на механические, прочностные и коррозионные свойства реакторных материалов.

11.10 Роль дефектов в сплавах с особыми свойствами для турбин и паросиловых установок

К материалам, используемым в конструкциях паросиловых установок, котлов, паропроводов и турбин, предназначенных для производства электроэнергии, предъявляются очень высокие требования. Такие материалы должны обладать высокими прочностными свойствами в области высоких температур. Обычные металлы для использования в таких условиях непригодны, поскольку они испытывают постоянно протекающую пластическую деформацию. Говорят, что металл, будучи твердым телом, в этих условиях течет. Сопrotивление металла ползучести и разрушению в области высоких температур при длительном воздействии нагрузки называют *жаропрочностью*.

Физические параметры пара, являющегося рабочим телом в паросиловой установке, таковы, что давление достигает 165 атмосфер, а в более мощных блоках (500, 800 или 1200 МВт) – 235 атмосфер. Температура пара достигает величины 540-560°C и выше (до 650°C). В очень тяжелых условиях работают лопатки турбины. Ползучесть материала лопаток приводит к их удлинению под действием центробежных сил, нарушению нормального режима их работы и к разрушению. 80% всех нарушений работы тепловых электрических станций приходится на повреждаемость котельного оборудования. Одной из главных причин повреждений поверхностей нагрева является дефектность металла или сплава. Для этих целей применяются так называемые котлотурбинные стали, легированные хромом, молибденом, ванадием, вольфрамом, ниобием.

Основные механизмы деформации металлов и сплавов связаны с движением дислокаций, миграцией межзеренных границ, вакансионными пото-

ками и зернограничным проскальзыванием. Для повышения жаропрочности необходимы меры по блокировке приведенных процессов. Это можно сделать различными методами на основе физических представлений о структуре и свойствах всех видов дефектов в твердом теле.

§ 12 Физическая кинетика

12.1 Неравновесные процессы.

Процессы, происходящие в системе при нарушении ее равновесного состояния, называются неравновесными. Теорию таких процессов изучает физическая кинетика. Различают феноменологическую кинетику или термодинамику неравновесных процессов, в которой рассматривают законы изменения параметров в неравновесных процессах, и статистическую кинетику, в которой на основе функций распределения молекул определяют кинетические коэффициенты этих процессов. Например, неравновесными являются процессы диффузии, теплопроводности и внутреннего трения.

Рассмотрение таких процессов использует понятие различных потоков. Это могут быть потоки вещества, как это происходит в случае диффузии; энергии в случае теплопроводности и импульса при изучении внутреннего трения. Выражения для кинетических коэффициентов содержат микроскопическую величину, характеризующую тепловое движение молекул – их среднюю длину пробега $\langle \lambda \rangle$. Эта величина определяется средним расстоянием, которое проходит молекула между двумя ее последовательными столкновениями с другими молекулами.

Пусть эффективный диаметр молекул равен d . Он определяется минимальным расстоянием, на которое сближаются две соударяющиеся молекулы. Эта величина слабо зависит от температуры, уменьшаясь с ее ростом. Среднее число столкновений молекулы за секунду определяется числом других молекул, центры которых попадают в цилиндр площади πd^2 и высоты $\langle v \rangle$. Если n – концентрация молекул, то

$$\langle Z \rangle = \pi d^2 n \langle v \rangle, \quad (2.103)$$

где $\langle v \rangle$ – средняя величина тепловой скорости молекул.

На самом деле необходимо учитывать не среднюю скорость молекул по отношению к лабораторной системе координат, а их относительную среднюю величину, т. к. молекулы, с которыми сталкивается данная, тоже движутся. Среднее значение квадрата относительной скорости:

$$\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle = \langle (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle - 2 \langle \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \rangle = 2 \langle v_1^2 \rangle \quad (2.104)$$

Здесь учтено, что средние квадраты скоростей любых молекул одинаковы $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle$, а $\langle \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ в силу их хаотической ориентации. Тогда $\sqrt{\langle v_{\text{отн}}^2 \rangle} = \sqrt{2} \langle v^2 \rangle$. Поскольку средние скорости пропорциональны их средним квадратичным значениям, такое же соотношение справедливо и для

средних скоростей $\langle v_{отн} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$. Тогда (2.103) принимает вид:

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle. \quad (2.105)$$

Тогда средняя длина пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (2.106)$$

12.2 Основные уравнения явлений переноса.

1. Теплопроводность.

Плотностью теплового потока называется количество теплоты, проходящее через единицу площади нормальной к потоку поверхности за единицу времени:

$$q = \frac{\delta Q}{\Delta S \Delta t}. \quad (2.107)$$

В одномерном случае справедлив закон Фурье, согласно которому тепловой поток пропорционален производной от температуры по координате:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}, \quad (2.108)$$

где κ – коэффициент теплопроводности. Рассмотрение теплового баланса приводит к уравнению теплопроводности в одномерном случае:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.109)$$

где c – теплоемкость единицы объема.

2. Диффузия.

Плотностью потока вещества j называется количество молекул диффундирующего вещества, проходящее через единицу площади нормальной к потоку поверхности за единицу времени:

$$j = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t}. \quad (2.110)$$

В одномерном случае диффузии справедлив закон Фика:

$$j = -D \frac{dn}{dx}, \quad (2.111)$$

где D – коэффициент диффузии, n – концентрация молекул. Уравнение, аналогичное (2.109) называется уравнением диффузии и имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (2.112)$$

3. Внутреннее трение (вязкость).

Это понятие было введено ранее в п. 2.2. Формулу (1.28), выражающую закон Ньютона для вязкости можно здесь записать более точно в виде:

$$\frac{F \Delta t}{\Delta S \Delta t} = -\eta \frac{du}{dx}.$$

Величину, стоящую слева, с учетом того, что $F\Delta t = \Delta p$ – количество переданного от слоя к слою импульса, можно представить как плотность потока импульса в направлении, поперечном к направлению скорости слоёв:

$$i = \frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t}. \quad (2.113)$$

Тогда

$$i = -\eta \frac{du}{dx}, \quad (2.114)$$

где через u обозначена скорость макроскопического движения слоев жидкости.

12.3 Кинетические коэффициенты

Перенос через поверхность некоторой физической величины A вдоль оси x означает, что молекулы, проходящие через нее в одну сторону, несут большее значение этой величины, чем проходящие в другую сторону. Разность количества этих величин и составляет поток. Если средняя длина пробега молекул λ , то до прохождения через поверхность молекулы со времени последнего столкновения прошли в среднем путь λ . В положительном направлении оси x движется в среднем $\frac{1}{6}$ часть всех молекул, столько же движется и в обратном направлении. Поэтому результирующий поток a величины A найдем как разность этих двух потоков:

$$a = \frac{1}{6} n \langle v \rangle (A(x - \lambda) - A(x + \lambda)) \quad (2.115)$$

Здесь $A(x)$ – функциональная зависимость физической величины от координаты. Разложим разность в скобках по формуле Тейлора с оставлением лишь первых производных: $A(x - \lambda) - A(x + \lambda) = -2 \frac{dA}{dx} \lambda$, тогда:

$$a = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \frac{dA}{dx}. \quad (2.116)$$

В случае теплопроводности в качестве переносимой величины A берется кинетическая энергия молекулы $A = w_k = c_V m_0 T$, где c_V – удельная изохорная теплоемкость, m_0 – масса одной молекулы. Тогда a – тепловой поток, он равен из (2.116):

$$q = -\frac{1}{3}n \langle v \rangle \lambda c_v m_0 \frac{dT}{dx}. \quad (2.117)$$

Но $nm_0 = \rho$ – плотность газа. Тогда (2.117) принимает вид:

$$q = -\frac{1}{3}\rho c_v \langle v \rangle \lambda \frac{dT}{dx}. \quad (2.118)$$

Сравнивая (2.118) с (2.108), получаем для коэффициента теплопроводности выражение:

$$\kappa = \frac{1}{3}\rho c_v \langle v \rangle \lambda \quad (2.119)$$

В случае внутреннего трения в качестве величины A берется импульс упорядоченного движения молекул в слое $A = m_0 u$. Тогда $\frac{dA}{dx} = m_0 \frac{du}{dx}$ и (2.116) принимает вид:

$$i = -\frac{1}{3}n \langle v \rangle \lambda m_0 \frac{du}{dx} = -\frac{1}{3}\rho \langle v \rangle \lambda \frac{du}{dx}. \quad (2.120)$$

Сравнение с (2.114) дает выражение для коэффициента внутреннего трения:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \langle v \rangle \lambda. \quad (2.121)$$

В случае диффузии уравнение переноса (2.116) имеет несколько иной вид. Здесь величина A выражает концентрацию молекул, поэтому, чтобы дважды не учитывать концентрацию сомножитель n в (2.116) выпадает. Тогда $A = n$; $\frac{dA}{dx} = \frac{dn}{dx}$ и выражения для потока молекул и коэффициента диффузии принимают вид:

$$j = -\frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \frac{dn}{dx}, \quad (2.122)$$

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \lambda \quad (2.123)$$

Из формул (2.119), (2.121) и (2.123) вытекают соотношения:

$$\eta = \rho D; \quad \kappa = \eta c_v. \quad (2.124)$$

Выражения (2.119), (2.121) и (2.123) справедливы для газов. Для конденсированных сред (жидкостей и твердых тел) выражения для соответствующих коэффициентов иные. Например, коэффициент теплопроводности для жидкости

$$\kappa_{жс} = \rho_{жс} c_p u_s L, \quad (2.125)$$

где u_s – скорость звука в жидкости, $\rho_{жс}$ – ее плотность, c_p – удельная изо-

барная теплоемкость, L – среднее межмолекулярное расстояние. Теплопроводность металлов в основном осуществляется свободными электронами в них и составляет

$$\kappa_e = \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 \sigma T, \quad (2.126)$$

где k – константа Больцмана, e – заряд электрона, σ – удельная электрическая проводимость металла.

Коэффициент диффузии в конденсированной среде

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \quad (2.127)$$

где D_0 – предэкспоненциальный множитель, W – энергия активации атомных скачков между равновесными положениями.

Коэффициент вязкости жидкости:

$$\eta_{жс} = \eta_0(T) \exp\left(\frac{W_0}{kT}\right). \quad (2.128)$$

Здесь предэкспоненциальный множитель $\eta_0(T)$ слабо зависит от температуры, W_0 – энергия активации вязкого течения. Внутреннее трение в твердых телах имеет сложную природу и определяется процессами, вызываемыми превращением механической энергии в тепловую при деформации, т. е. неупругостью, связанной с различными релаксационными процессами.