Московский энергетический институт
/технический университет/
Волжский филиал

Кафедра общетехнических дисциплин

Лабораторная работа № 4

Изучение движения маятника Максвелла

Волжский 2000

Лабораторная работа № 4.

Изучение движения маятника Максвелла.

I. Цель работы.

Определение момента инерции маятника Максвелла. Определение силы натяжения нитей при движении и в момент "рывка" /нижняя точка траектории/.

2. Теоретические основы работы.

Маятник Максвелла представляет собой однородный диск, насаженный на цилиндрический вал /рис. I/; центры масс диска и вала лежат на оси вращения. На вал радиусом r намотаны нити, концы которых закреплены на кронштейне. При разматывании нитей маятник Максвелла совершает плоское движение. Плоским называют такое движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.

Плоское движение маятника можно представить как сумму двух движений - поступательного движения центра масс вдоль оси Oy со скоростью V и вращательного движения с угловой скоростью ω относительно оси $O'z$, проходящей через центр масс маятника.

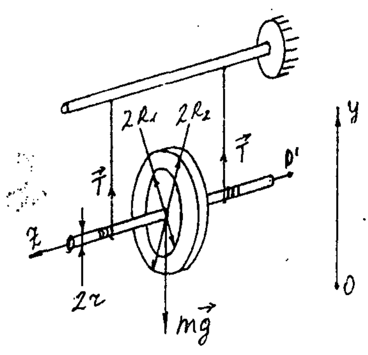

Рис. I.

При движении маятника Максвелла происходит процесс перехода потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Разумеется, механическая энергия постепенно убывает в результате действия сил трения. Согласно теореме о движении центра масс, центр масс движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, а действующая на нее сила - геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}_c$$

Здесь индекс C означает центр масс системы.

Основное уравнение динамики вращательного движения для маятника Максвелла относительно мгновенной оси $O'z$, проходящей через центр масс имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = J_z \varepsilon_z$$

Здесь J_z - момент инерции маятника относительно оси $O'z$;

ε_z - проекция углового ускорения на ось $O'z$; левая часть уравнения - алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси $O'z$.

Если нить не проскальзывает, то скорость центра масс маятника и угловая скорость ω связаны кинематическим соотношением

$$v_c = \omega r$$

г/. Определение момента инерции маятника Максвелла.

Используя закон сохранения механической энергии можно экспериментально определить момент инерции маятника. Для этого измеряется время τ опускания маятника массой m с высоты h .

Примем потенциальную энергию маятника Максвелла $W_{п.н.} = 0$ в положении, когда маятник находится в нижней точке. Кинетическая энергия в этом положении

$$W_{к.н.} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \qquad /1/$$

Здесь v - скорость центра масс маятника; ω - угловая скорость; J - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс; $m = m_в + m_д + m_к$ - масса маятника; $m_в$, $m_д$, $m_к$ - - массы вала, диска и кольца, входящих в состав маятника.

В верхнем положении маятника его потенциальная энергия

$$W_{п.в} = mgh$$

а кинетическая энергия равна нулю. Из закона сохранения механической энергии для маятника Максвелла /диссипативными силами, т.е. силами трения, сопротивления воздуха и т.п. пренебрегаем/ следует

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \qquad /2/$$

Тат как центр масс маятника движется прямолинейно и равноускоренно, то

$$h = \frac{a\tau^2}{2} \qquad v = a\tau \qquad /3/$$

Из /3/ получим

$$v = \frac{2h}{\tau} \qquad /4/$$

Подставляя соотношение /4/ в /2/ и используя соотношение между скоростью центра масс и угловой скоростью вращения маятника относительно оси симметрии, получим формулу для расчета экспериментального момента инерции маятника Максвелла

$$J_э = mr^2\left(\frac{g\tau^2}{2h} - 1\right) \qquad /5/$$

Здесь r - радиус вала

Полученный результат сравниваем со значением момента инерции, определяемым из теоретических соображений. Теоретический момент инерции маятника Максвелла можно рассчитать по формуле

$$J_T = J_В + J_Д + J_К \qquad /6/$$

Здесь $J_В$, $J_Д$, $J_К$ – моменты инерции составных частей маятника: вала, диска и кольца соответственно.

Используя общую формулу для определения момента инерции

$$J = \int r^2 dm \qquad /7/$$

найдем моменты инерции элементов маятника Максвелла.

Момент инерции вала $$J_В = \frac{m_В r^2}{2} \qquad /8/$$

Момент инерции диска $$J_Д = \frac{m_Д R_1^2}{2} \qquad /9/$$

Здесь R_1 – радиус диска, он же внутренний радиус кольца /рис. I /.

Момент инерции кольца $$J_К = \frac{m_К}{2}(R_1^2 + R_2^2) \qquad /10/$$

Здесь R_2 – внешний радиус кольца

б/. Определение силы натяжения нитей при движении маятника Максвелла $T_Д$ и в момент "рывка" – $T_р$.

Движение маятника Максвелла описывается системой уравнений

$$-ma = 2T - mg \qquad /11/$$

$$J\varepsilon = 2Tr \qquad /12/$$

$$h = \frac{at^2}{2} \qquad /13/$$

Из /II/ и /I2/ следует, что при движении маятника Максвелла сила натяжения нити равна

$$T_Д = \frac{mg}{2\left(\frac{mr^2}{J} + 1\right)} \qquad /14/$$

где момент инерции маятника $J_э$ определяется соотношением /5/.

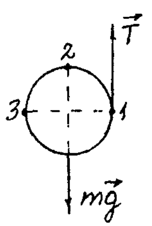

Рис. 2.

Скорость центра масс маятника v и кинетическая энергия поступательного движения $W_{пост} = \frac{mv^2}{2}$ максимальны в нижнем положении маятника, когда нити полностью раскручены и точки их закрепления находятся в положении I /рис. 2 /. С этого момента величины v и $W_{пост}$ начинают уменьшаться и в точке 2 становятся равными нулю. Энергия $W_{пост}$ переходит в потенциальную энергию натяжения нитей. В результате резкого увеличения сил натяжения нитей происходит "рывок". При переходе от точки 2 к точке 3 нити начинают наматываться и процесс идет в обратном направлении: энергия натяжения нитей переходит в кинетическую энергию поступательного движения, величины $W_{пост.}$ и v увеличиваются, причем $|\vec{v}_1| \approx |\vec{v}_3|$. Отсюда следует, что за время половины оборота вала импульс сил, действующих на маятник равен

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Big)\Delta\tau = m(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$$

Здесь $\Big|\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Big|$ - значение суммарной силы, действующей на маятник в процессе изменения направления движения. В результате получим

$$(2T_p - mg)\cdot\Delta\tau = 2mv \qquad /15/$$

Здесь $v_1 = v_2 = v$; T_p - средняя сила натяжения нити за время "рывка". Время половины оборота, когда происходит "рывок", приближенно равно

$$\Delta\tau = \frac{\pi r}{v} \qquad /16/$$

Здесь r - радиус вала; v - максимальная скорость центра масс маятника, определяется из /13/

$$v = a\tau = \frac{2h}{\tau} \qquad /17/$$

Из /15/, /16/ и /17/ следует, что средняя сила натяжения нити при "рывке" приближенно равна

$$T_p = \frac{m}{\pi r}\Big(\frac{2h}{\tau}\Big)^2 + \frac{mg}{2} \qquad /18/$$

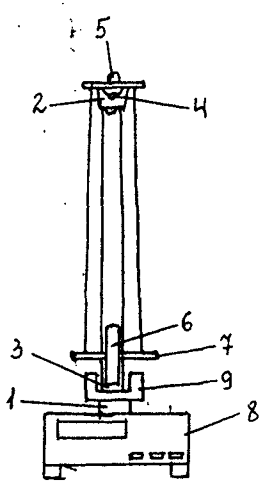

Рис. 3.

3. Описание экспериментальной установки.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 3. На вертикальной стойке 1 закреплены кронштейны 2 и 3. На кронштейне 2 смонтирован электромагнит 4 и устройство 5 для крепления и регулировки длины нитей подвеса. Маятник представляет собой диск 6, жестко скрепленный с цилиндрическим валом 7. На диск насаживается съемное кольцо, меняя которое можно изменять массу маятника и его момент инерции. Маятник фиксируется в верхнем положении электромагнитом 4, На стойке I закреплена миллиметровая шкала, позволяющая определить расстояние, на которое опускается центр масс маятника при его движении. Время движения маятника от верхнего до нижнего положения измеряется с помощью секундомера 8 с цифровой индикацией. Включение секундомера осуществляется нажатием клавиши "Пуск", расположенной на нижней панели прибора. Одновременно отключаются от источника питания электромагниты, удерживающие маятник в верхнем положении, начинается движение маятника вниз. Остановка счета времени осуществляется при помощи фотоэлектрического датчика 9 в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика. Фотодатчик закреплен на нижнем кронштейне 3. Кронштейн 3 может перемещаться вдоль вертикальной стойки I.

4. Порядок выполнения работы.

I. Подключить установку к сети 220 В.
2. Закрепить кронштейн 3, определив по метке на кронштейне расстояние h, которое пройдет маятник до пересечения оптической оси фотодатчика.
3. Нажать клавишу "Сеть". При этом должна загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы секундомера. Одновременно замыкается цепь электромагнита.
4. Вращая маятник, зафиксировать его в верхнем положении при помощи электромагнита. При этом необходимо следить за тем, чтобы нити наматывались на вал виток к витку в направлении к диску.
5. Нажать клавишу "Сброс", цифровые индикаторы должны показать нули.
6. Нажать клавишу "Пуск". При этом цепь электромагнита размыкается, маятник начинает раскручиваться и двигаться вниз. Начинается счет времени движения.
7. Сразу же после одного полного колебания /спуск-подъем/ остановить маятник и вновь зафиксировать его в верхнем положении с помощью электромагнита.
8. Записать в таблицу показание секундомера.
9. Пункты 5 - 8 повторить не менее пяти раз.

5. Данные установки и таблица результатов измерений.

$m_в$ = 33 г - масса вала; $m_д$ = 125,4 г - масса диска;
$m_к$ = 391 г - масса кольца; d = 10 мм - диаметр вала;
d_1 = 86 мм - диаметр диска и внутренний диаметр кольца;
d_2 = 105 мм - внешний диаметр кольца; g = 9,82 м/с^2 - ускорение свободного падения

№	τ, с	$(\tau_i - \bar{\tau})^2$
1 2 3 4 5		
Средн.		$\sum_i =$

6. Обработка результатов измерений.

1. Рассчитать среднее значение времени τ.
2. Рассчитать экспериментальный момент инерции $J_э$ маятника по формуле /5/.
3. По формулам /6/, /8/ - /10/ рассчитать значение теоретического момента инерции J_T. Сравнить $J_э$ и J_T.
4. По формуле /14/ и /18/ определить силы натяжения нитей $T_Д$ и $T_р$ при движении маятника и в момент "рывка". Сравнить $T_Д$ и $T_р$.
5. Считая погрешности δ_m, δ_h, δ_d значительно меньше погрешности $\delta\tau$, рассчитать относительную погрешность $\delta J_э$ по формуле $\delta J_э = 2\delta\tau \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2h}{g\tau^2}}}$
6. Рассчитать абсолютную погрешность $\Delta J_э = J_э \cdot \delta J_э$.
7. Записать результат определения $J_э$ с учетом погрешности измерения и с указанием на доверительную вероятность.

7. Контрольные вопросы.

1. Какое движение называется плоским?
2. Напишите уравнение динамики вращательного движения для маятника Максвелла.
3. Напишите уравнение поступательного движения центра масс для маятника Максвелла.
4. Что называется моментом инерции материальной точки?
5. Как рассчитать момент инерции маятника Максвелла?
6. Почему диск маятника не поднимается на первоначальную высоту?
7. Из каких простых движений состоит плоское движение?
8. Сформулируйте закон сохранения механической энергии для маятника Максвелла.
9. Напишите основные уравнения динамики для поступательного и вращательного движений.
10. Куда переходит кинетическая энергия поступательного движения при опускании маятника в крайнее нижнее положение?
11. Будет ли работать маятник Максвелла, если диаметр вала будет равен наружному диаметру диска?