§16. Правило квантования круговых орбит

Условие для стационарных орбит Бор получил, исходя из постулата Планка, согласно которому осуществляются только такие состояния гармонического осциллятора, энергия которых равна

$$E_n = n\hbar\omega, (n \text{ — целое число}). \tag{16.1}$$

Обозначим координату осциллятора буквой q, а импульс — буквой p. Полная энергия осциллятора определяется выражением $E_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = n\hbar\omega$. Отсюда

$$\frac{q^2}{2n\hbar/m\omega} + \frac{p^2}{2mn\hbar\omega} = 1. \tag{16.2}$$

Координатную плоскость q, p называют *фазовой плоскостью*, а кривую на этой плоскости, определяющую для данного движения p как функцию q, — *фазовой траекторией.* Из (16.2) следует, что фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс (рис. 1). Полуоси эллипса равны $a = \sqrt{2n\hbar/m\omega}, b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$.

Площадь эллипса равна произведению полуосей, умноженному на π:

$$S_n = \pi ab = 2\pi\hbar n. \tag{16.3}$$

Вместе с тем площадь можно представить в виде

$$S_n = \oint p\,dq \tag{16.4}$$

(при интегрировании совершается обход по всему эллипсу, см. рис. 1).

Из сравнения выражений (16.3) и (16.4) вытекает правило квантования:

$$\oint p\,dq = 2\pi\hbar n. \tag{16.5}$$

Полученное для гармонического осциллятора правило (16.5) Бор распространил и на другие механические системы. В случае осциллятора $q = x, p = m\dot{x}$. Для других систем под q понимают обобщенную координату, а под p — обобщенный импульс.

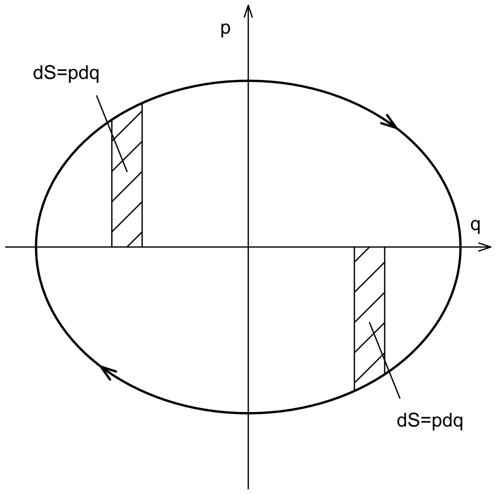

Рис. 1.

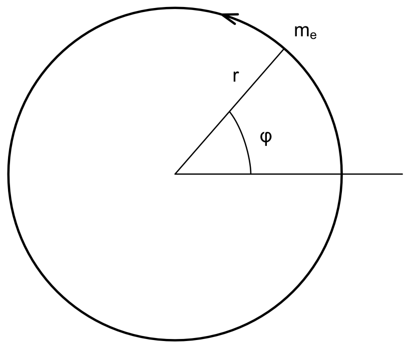

Рис. 2.

Для электрона, движущегося вокруг ядра по круговой орбите, естественно взять в качестве обобщенной координаты азимутальный угол φ (рис. 2). Обобщенной скоростью в этом случае будет $\dot{\varphi}$. Мы знаем, что при вращательном движении роль линейной скорости переходит к угловой скорости $\dot{\varphi}$, а роль массы — к моменту инерции $m_e r^2$ (m_e — масса электрона). Соответственно обобщенный импульс равен $m_e r^2 \dot{\varphi} = m_e v r$. Последнее выражение определяет момент обычного импульса M, взятый относительно ядра. Таким образом, для электрона, движущегося по круговой орбите, условие (16.5) имеет вид

$$\oint M\, d\varphi = 2\pi\hbar n. \qquad (16.6)$$

Сила, с которой ядро действует на электрон, является центральной. Поэтому $M = \mathrm{const}$ и левая часть соотношения (16.6) равна $2\pi M$. Следовательно, мы приходим к условию

$$M = n\hbar. \qquad (16.7)$$

Итак, согласно условию Бора, из всех орбит электрона, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются только те, для которых момент импульса равен целому кратному постоянной Планка $\hbar$.