ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ И НАУКЕ

Филиал государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Московский энергетический институт
(технический университет)»
в г. Волжском

Кафедра «Механика и материаловедение»

В.Г. Кульков, В.П. Мельников, С.В. Кулешина

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие
к выполнению семестрового задания

ВОЛЖСКИЙ 2008

УДК 539.2
ББК 22.3

Рецензенты:
Суркаев А.Л., канд. техн. наук, доцент,
зав. кафедрой ««Прикладная физика» ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
Дорогов Ю.И., канд. техн. наук, доцент кафедры ВМ
филиала «МЭИ (ТУ)» в г. Волжском

Кульков В.Г., Мельников В.П., Кулешина С.В.
Механика. Молекулярная физика: Учебное пособие к выполнению семестрового задания / Кульков В.Г., Мельников В.П., Кулешина С.В. – Волжский: Филиал «МЭИ (ТУ)» в г. Волжском, 2008. – 64 с.

Первая часть пособия содержит изложение методики решения задач по разделам «Механика», «Молекулярная физика». Каждый раздел содержит основные соотношения и формулы, а также снабжен большим количеством примеров решения задач. Во второй части пособия приводятся условия задач для самостоятельного решения при выполнении семестровой работы студентами первого курса, обучающимися по направлениям «Теплоэнергетика» и «Электроэнергетика».

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Учебно-методическим советом филиала «МЭИ (ТУ)» в г. Волжском.

УДК 539.2
ББК 22.3

© В.Г. Кульков, 2008
© В.П. Мельников, 2008
© С.В. Кулешина, 2008
© Филиал «МЭИ (ТУ)»
в г. Волжском, 2008

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

При решении задач целесообразно использовать следующие методические указания.

1. Внимательно прочитать задачу, сделать краткую запись условия, выразить все данные в СИ и, где это возможно, выполнить схематический чертеж, поясняющий содержание задачи.

2. Провести подробный анализ задачи, начиная с выяснения того, что является объектом изучения, какие тела или системы охватывает изучаемый процесс, какие величины его определяют, каково направление процесса. Только после этого можно установить, каким физическим законам подчиняются описываемые явления.

3. Выяснить, какие физические законы лежат в основе данной задачи, решить ее в общем виде, то есть выразить искомую физическую величину через заданные величины (в буквенных обозначениях, без подстановки числовых значений в промежуточные формулы).

4. Проверив правильность общего решения, подставить числа в окончательную формулу и указать единицу искомой физической величины, проверив правильность ее размерности*.

5. Записать окончательный ответ.

* Основные, дополнительные и производные единицы СИ, имеющие собственное наименование, приведены в табл. 1-3 Приложения.

§1. КИНЕМАТИКА

1.1. Основные формулы

• Положение точки в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{r}$, то есть вектором, проведенным из начала координат в данную точку.

• Перемещение ($\Delta\vec{r}$) точки есть вектор, проведенный из ее начального положения в конечное и равный приращению радиус-вектора данной точки.

• Скорость есть производная от радиус-вектора движущейся точки по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.1}$$

• Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора движущейся точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.2}$$

• В равномерном прямолинейном движении ($\vec{\upsilon} = \text{const}$) выполняется соотношение

$$\Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}\Delta t. \tag{1.3}$$

• Формулы движения с постоянным ускорением ($\vec{a} = \text{const}$):

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t, \tag{1.4}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{1.5}$$

где υ_0 – начальная скорость.

• В криволинейном движении точки полное ускорение $\vec{a}$ есть векторная сумма тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений. Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \tag{1.6}$$

при этом

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \tag{1.7}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \tag{1.8}$$

где R – радиус кривизны в данной точке.

• Среднее значение модуля скорости точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ равно

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1.9}$$

где Δs – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

• Угловая скорость тела есть производная от угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.10)$$

• Угловое ускорение тела есть производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (1.11)$$

• В равномерном вращательном движении ($\omega = \text{const}$) выполняется соотношение

$$\varphi = \omega t. \qquad (1.12)$$

• Формулы равнопеременного вращательного движения тела вокруг неподвижной оси ($\varepsilon = \text{const}$):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (1.13)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (1.14)$$

• Связь угловых величин с линейными:

$$s = \varphi R,\ \upsilon = \omega R,\ a_\tau = \varepsilon R,\ a_n = \omega^2 R, \qquad (1.15)$$

где s – путь, пройденный точкой вращающегося тела (длина дуги); R – расстояние точки от оси вращения (радиус дуги).

• Угловая скорость тела, вращающегося равномерно, связана с числом оборотов в секунду n и периодом вращения T соотношением

$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T. \qquad (1.16)$$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1. Камень, брошенный с высоты $h = 2{,}1$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, падает на землю на расстоянии $S = 42$ м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость камня, время полета и максимальную высоту подъема над уровнем земли. Определить радиус кривизны траектории в верхней точке и в точке падения камня на землю.

Дано:
$h = 2{,}1$ м
$\alpha = 45°$
$S = 42$ м

υ_0; t; H; R = ?

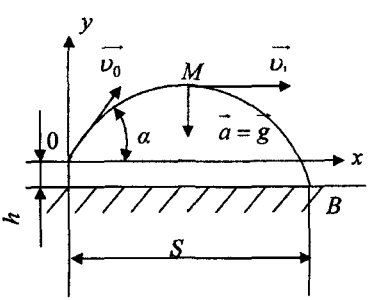

Рис. 1

Движение камня можно представить как совокупность двух движений (рис. 1): равномерное – вдоль оси $0x$ (со скоростью υ_0) и равнопеременное – вдоль оси $0y$ (со скоростью υ_y), описываемых уравнениями 1.3, 1.4, 1.5.

Решение. 1. Начало отсчёта выберем в точке бросания камня ($x_0 = y_0 = 0$). Проектируя все векторы, входящие в уравнения 1.3; 1.4; 1.5, на оси координат и учитывая, что проекция суммы векторов равна сумме их проекций, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_x = 0; \quad \upsilon_x = \text{const} = \upsilon_0 \cos\alpha; \quad x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t; & (1) \\ a_y = -g; \quad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt; \quad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. & (2) \end{cases}$$

В конечной точке траектории $x = S$, $y = -h$; тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$\begin{cases} S = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t; \\ -h = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений с двумя неизвестными υ_0 и t, получим

$$t = \sqrt{\frac{2(h + s\ \text{tg}\alpha)}{g}} = 3\ \text{с}; \qquad \upsilon_0 = \frac{S}{\cos\alpha \cdot t} = 20\ \text{м/с}.$$

Найдём максимальную высоту подъёма камня над землёй

$$H = h + y_{\max}.$$

При $y = y_{\max}$ имеем $\upsilon_y = 0$, $t = t_1$. Подставив в уравнение (2) $\upsilon_y = 0$, найдём время подъёма $\tau_1 = \dfrac{\upsilon_0}{g}\sin\alpha$. Тогда

$$y_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}; \qquad H = h + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 12\ \text{м}.$$

2. Зная законы изменения проекций υ_x и υ_y со временем, можно найти модуль и направление скорости для любого момента времени. Вектор ускорения постоянен и известен ($\vec{a} = \vec{g}$), следовательно, для любого момента времени можно определить нормальное ускорение (проекцию вектора $\vec{a}$ на ось n, перпендикулярную вектору скорости и направленную к центру кривизны траектории) и радиус кривизны траектории.

В верхней точке траектории $\upsilon_y = 0$, поэтому $\upsilon_M = \upsilon_x$, следовательно $\vec{a} \perp \vec{\upsilon}_M$. Это значит, что $a_n = a = g$.

Зная нормальное ускорение и скорость, найдем радиус кривизны траектории в точке M (1.8)

$$R_M = \frac{\upsilon_M^2}{a_n} = \frac{\upsilon_0^2}{g}\cos^2\alpha = 20\ \text{м}.$$

В точке B (рис. 2) скорость

$$\upsilon_B=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{\upsilon_0^2\cos^2\alpha+(\upsilon_0\sin\alpha-gt)^2}=20{,}8 \text{ м/с}.$$

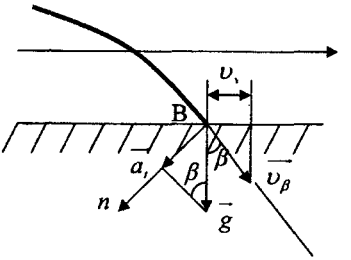

Рис. 2

Нормальное ускорение

$$a_n=\frac{\upsilon_B^2}{R_B}=g\sin\beta.$$

Здесь $\sin\beta=\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_B}=\dfrac{\upsilon_0\cos\alpha}{\upsilon_B}$, где β – угол между векторами ускорения и скорости.

Тогда радиус кривизны траектории в точке B

$$R_B=\upsilon_B^2(g\upsilon_0\cos\alpha)=67 \text{ м}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = 20$ м/с; $t = 3$ с; $H = 12$ м; $R_M = 20$ м; $R_B = 67$ м.

Задача 1.2. Материальная точка начинает двигаться по окружности радиуса $r = 10$ см с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0{,}4$ см/с^2. Через какой промежуток времени вектор ускорения $\vec{a}$ образует с вектором скорости $\vec{\upsilon}$ угол $\beta = 60°$? Какой путь пройдет за это время движущаяся точка? На какой угол повернется радиус-вектор, проведенный из центра окружности к движущейся точке, если в начальный момент времени он направлен вертикально вверх? Движение происходит по часовой стрелке.

Дано:	СИ
$r = 10$ см	0,1 м
$a_\tau = 0{,}4$ см/с^2	0,004 м/с^2
$\beta = 60°$	
S; t; $\varphi(t) = ?$	

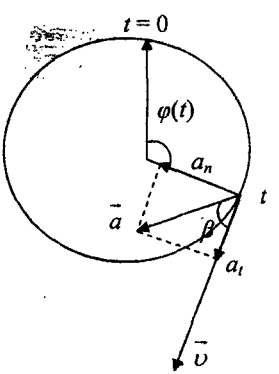

Рис. 3

По условию задачи материальная точка совершает ускоренное криволинейное движение, ее скорость υ, а следовательно и нормальное ускорение $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{r}$ непрерывно возрастает со временем. Касательное ускорение, по условию задачи, постоянно. Следовательно, вектор полного ускорения a со временем изменяется как по модулю, так и по направлению. Угол β между векторами $\vec{a}$ и $\vec{\upsilon}$ зависит от соотношения между нормальным a_n и касательным a_τ ускорениями (рис. 3):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{a_n}{\upsilon^2}}{\frac{a_\tau}{r a_\tau}}. \qquad (1)$$

Постоянство касательного ускорения позволяет найти закон изменения со временем пути S, пройденного точкой, или угла поворота φ радиус-вектора.

Решение. Касательное ускорение $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \text{const}$. Следовательно, мгновенная скорость движущейся точки (при $\upsilon_0 = 0$) $\upsilon = a_\tau t$. Подставляя это выражение в формулу (1), находим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(a_\tau t)^2}{(a_\tau r)} = \frac{a_\tau t^2}{r}.$$

Тогда время и путь соответственно равны:

$$t = \sqrt{\frac{r\operatorname{tg}\beta}{a_\tau}} = 6{,}6 \text{ с}; \quad S = \int_0^t \upsilon\, dt = \int_0^t a_\tau t\, dt = \frac{a_\tau t^2}{2} = 8{,}7 \text{ см}.$$

Угол поворота $\varphi = \dfrac{S}{r}$ изменяется со временем также по квадратичному закону:

$$\varphi = \frac{a_\tau t^2}{2r} = 0{,}87 \text{ рад}.$$

Ответ: $t = 6{,}6$ с; $S = 8{,}7$ см; $\varphi = 0{,}87$ рад.

Задача 1.3. Мячик, брошенный с балкона в вертикальном направлении, через t = 3 с упал на землю. Определить начальную скорость мячика, если высота балкона над землей равна 14,1 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:
$t = 3$ с
$h = 14{,}1$ м
$\upsilon_0 = ?$

Мячик совершает равномерное прямолинейное движение с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, описываемое уравнением 1.5. В условии не указано направление, в котором брошен мяч, – вертикально вниз или вверх (рис. 4).

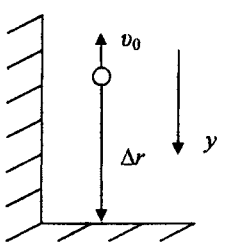

Рис. 4

Решение. Предположим, что мяч брошен со скоростью υ_0 вертикально вверх. Направим ось проекций y вертикально вниз. Соблюдая правило знаков, получим по (1.5)

$$y = -\upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

Решив уравнение относительно υ_0, найдём

$$\upsilon_0 = \frac{gt^2 - 2y}{2t} = \frac{9{,}8 \cdot 9 - 2 \cdot 14{,}1}{2 \cdot 3} = 10 \text{ м/с}.$$

Положительный знак величины υ_0 показывает, что начальная скорость мяча направлена именно так, как мы предположили, то есть вертикально вверх.

Замечания:

1. Легко убедиться в том, что выбор положительного направления оси отсчета произволен. Так, направив ось y вверх, получим уравнение

$$-y = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

которое, очевидно, равносильно предыдущему.

2. Если предположить, что начальная скорость υ_0 направлена вертикально вниз, то есть по оси y, то будем иметь

$$y = \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

Решив это уравнение, найдем $\upsilon_0 = -10$ м/с. Отрицательный знак показывает, что на самом деле начальная скорость мяча была направлена не так, как мы предположили, а вертикально вверх, то есть пришли к прежнему результату.

Ответ: $\upsilon_0 = 10$ м/с.

§2. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Основные законы и формулы

• Для решения задач динамики составляется уравнение движения материальной точки, выражающее второй закон Ньютона (основное уравнение динамики поступательного движения):

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad (2.1)$$

где $\sum \vec{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к телу; m и $\vec{a}$ – его масса и ускорение.

• Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки:

$$F_\tau = ma_t = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}; \quad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R. \qquad (2.2)$$

• Закон трения скольжения: сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления между поверхностями трущихся тел (Амонтон):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \qquad (2.3)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств поверхности.

• Сила трения качения

$$F_{тр} = f_к N/r, \tag{2.4}$$

где $f_к$ – коэффициент трения качения; r – радиус катящегося тела.

• Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского):

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_р, \tag{2.5}$$

где реактивная сила $\vec{F}_р = -\vec{U}\dfrac{dm}{dt}$ (U – скорость истечения газов из ракеты).

• Формула Циолковского для определения скорости ракеты:

$$\vec{\upsilon} = \vec{U}\ln\frac{m_0}{m}, \tag{2.6}$$

где m_0 – начальная масса ракеты.

• Основной закон динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\sum M_{iz}^{внешн} = I\varepsilon = I_z\frac{d\omega}{dt}, \tag{2.7}$$

где ε – угловое ускорение; I_z – момент инерции тела относительно оси z; M_i – момент силы.

• Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right], \tag{2.8}$$

где r – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$.

• Модуль момента силы

$$M = F\,L, \tag{2.9}$$

где L – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

• Моменты инерции однородных тел относительно осей вращения, проходящих через их центры масс:

Таблица 1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной L	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}mL^2$
То же	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}mL^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

• Теорема Штейнера:

$$I = I_c + ma^2, \tag{2.10}$$

где I_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; I – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m – масса тела.

• Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z:

$$W_{вр} = I_z \frac{\omega^2}{2}, \tag{2.11}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – его угловая скорость.

• Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$$W = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2, \tag{2.12}$$

где m – масса тела; v_c – скорость центра массы тела; I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

2.2. Примеры решения задач

Задача 2.1. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением a = 3 м/с^2, висит на проволоке груз массой m = 2 кг. Определить силу натяжения T проволоки и угол α её отклонения от вертикали, если груз неподвижен относительно вагона.

Дано:
$a = 3$ м/с^2
$m = 2$ кг

T; α = ?

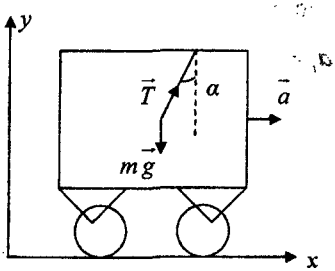

Рис. 5

Независимо от состояния вагона (покой или движение) на груз действуют только две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. Так как груз неподвижен относительно вагона, его ускорение равно ускорению вагона. При этом нить должна быть отклоненной от вертикали назад, так как только в этом случае равнодействующая сил $\vec{mg}$ и $\vec{T}$ будет направлена вперед, сообщая грузу ускорение $\vec{a}$ (рис. 5). Второй закон Ньютона в применении к грузу выразится уравнением

$$\vec{mg} + \vec{T} = \vec{ma}.$$

Решение. Выберем систему координат, не связанную с движущимся вагоном. Проектируя векторы mg, T, ma на оси x и y, получим соответственно два скалярных уравнения:

$$T\sin\alpha = ma, \quad T\cos\alpha - mg = 0.$$

Совместное решение этих уравнений и последующее вычисление дают:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{g}\right), \quad T = m\sqrt{a^2 + g^2};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{9{,}8} = \operatorname{arctg} 0{,}31 = 17°, \quad T = 2\sqrt{3^2 + 9{,}8^2} = 21\text{Н}.$$

Ответ: $T = 21$ Н; $\alpha = 17°$.

Задача 2.2. Груз массой m = 45 кг вращается на канате длиной l = 5 м в горизонтальной плоскости, с постоянной скоростью. При этом угол отклонения каната от вертикали α = 37°. Найти силу его натяжения и угловую скорость ω вращения груза.

Дано:
$m = 45$ кг
$l = 5$ м
$\alpha = 37°$

T; ω = ?

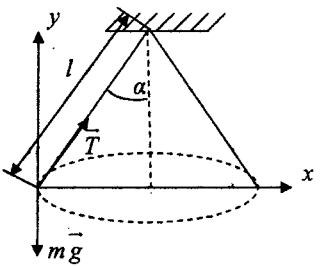

Рис. 6

Тело (груз) можно принять за материальную точку, движущуюся с постоянной скоростью по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости. Это значит, что касательное ускорение $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$, следовательно, полное ускорение тела есть нормальное ускорение a_n, направленное к центру окружности радиуса r:

$$\vec{a} = \vec{a_n} = \omega^2 \vec{r}. \qquad (1)$$

Тогда на тело действует только сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (рис. 6). По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \qquad (2)$$

Решение. Выберем оси x и y так, чтобы одна из них была направлена в сторону ускорения. Проектируя векторы, входящие в уравнение (2), на эти оси, получим

$$\begin{cases} T\sin\alpha = ma_n; \\ -mg + T\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

На основании этих уравнений находим

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \quad ma_n = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Подставив числовые значения величин, и выполнив вычисления, находим силу натяжения каната:

$$T = \frac{45\ \text{кг} \cdot 9{,}8\ \text{м} \cdot \text{с}^2}{\cos 37^\circ} = 552\ \text{Н}.$$

Угловую скорость вращения груза определим, подставив (1) в (3):

$$m\omega^2 r = mg\,\text{tg}\,\alpha.$$

Радиус окружности, по которой движется тело, $r = l\sin\alpha$.
Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}} = 1{,}6.$$

Ответ: $T = 552$ Н; $\omega = 1{,}6$.

Задача 2.3. На наклонной плоскости находится груз массой $m_1 = 4$ кг, связанный нитью, перекинутой через блок, с другим грузом $m_2 = 1{,}5$ кг. Коэффициент трения между первым грузом и плоскостью $k = 0{,}1$, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Определить ускорение грузов, силу натяжения нити.

Дано:
$m_1 = 4$ кг
$m_2 = 1{,}5$ кг
$k = 0{,}1$
$\alpha = 30°$

$a;\ T = ?$

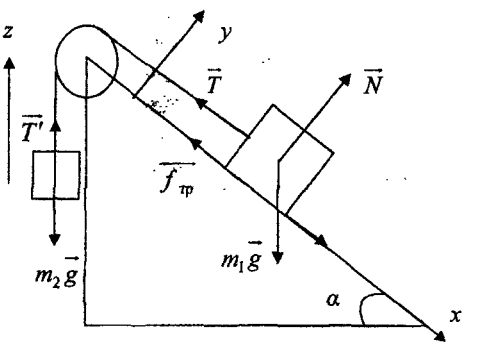

Рис. 7

Два тела (грузы), связанные нитью, совершают поступательное движение. Нить считаем нерастяжимой, тогда ускорения этих тел равны по модулю $a_1 = a_2$. На тело массой m_1 действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции наклонной плоскости $\vec{N}$, сила натяжения $\vec{T}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. Сила трения направлена в сторону, противоположную скорости тела. Так как направление движения грузов неизвестно, то сначала определяем направление движения при отсутствии сил трения, а затем решаем задачу с учётом сил трения.

Второй закон Ньютона для первого тела без учёта сил трения имеет вид

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}. \qquad (1)$$

На тело m_2 действуют только сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T'}$ нити (рис. 7):

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T'}. \qquad (2)$$

Решение. Для описания движения тела m_1 выбираем оси x и y, для тела m_2 – ось z. Запишем для каждого груза уравнение (1) и (2) в проекциях на эти оси:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha - T; \\ m_2 a_{2z} = T - m_2 g; \\ a_{1x} = a_{2z}. \end{cases} \qquad (3)$$

После решения системы (3), получим

$$a_{1x} = g\frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} = 9{,}8\frac{4 \cdot \sin 30 - 1{,}5}{5{,}5} > 0.$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось x положительна, это значит, что тело m_1 движется вниз по наклонной плоскости, следовательно, сила трения направлена вверх.

Учитывая, что $a_{1x} = a_{2z} = a$; $f_{\text{тр.}x} = -f_{\text{тр}} = -kN$, запишем уравнение (3):

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T - kN;\ m_2 a = T - m_2 g.$$

Силу нормальной реакции N найдём из уравнения (1), записанного в проекции на ось y:

$$a_{1y} = 0; \quad 0 = N - m_1 g \cos\alpha,$$

тогда

$$N = m_1 g \cos\alpha.$$

Окончательно

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T - k m_1 g \cos\alpha; \\ m_2 a = T - m_2 g. \end{cases} \qquad (4)$$

Совместное решение системы (4):

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - k\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 9{,}8 \cdot \frac{4 \cdot (\sin 30 - 0{,}1 \cdot \cos 30) - 1{,}5}{5{,}5} = 0{,}27 \text{ м/с}^2,$$

$$T = m_2(a + g) = 15{,}51 \text{ Н}.$$

Ответ: $a = 0{,}27$ м/с^2; $T = 15{,}51$ Н.

Задача 2.4. Ракета с начальной массой $M = 500$ г выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно неё скоростью $U = 400$ м/с. Расход газа $\mu = 150$ г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определить, какую скорость относительно Земли приобретёт ракета через время $t = 2$ с после начала движения, если её начальная скорость равна нулю?

Дано:	СИ
$M = 500$ г	0,5 кг
$U = 400$ м/с	
$\mu = 150$ г/с	0,15 кг/с
$v_0 = 0$	
$v = ?$	

Из условия задачи следует, что внешние силы отсутствуют, поэтому импульс системы тел «ракета – выбрасываемый газ» остаётся постоянным. Начальная скорость ракеты равна нулю, поэтому движение ракеты будет прямолинейным.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x, совпадающую с направлением скорости υ:

$$(M-\mu t)d\upsilon-\mu U\,dt=0,$$

где $d\upsilon$ – изменение скорости ракеты (за счёт реактивного действия выбрасываемой струи газа) за промежуток времени dt. Отсюда

$$d\upsilon=\frac{\mu U}{M-\mu t}dt. \qquad (1)$$

Решение. Скорость υ как функцию времени найдём, интегрируя выражение (1) в пределах от 0 до t.

При $t=0$ $\upsilon=0$, следовательно

$$\upsilon=U\int_0^t\frac{\mu\,dt}{M-\mu t},$$

откуда

$$\upsilon=U\ln\frac{M}{M-\mu t}=366\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon=366$ м/с.

Задача 2.5. Маховик, массу которого m = 5 кг можно считать распределённой по ободу радиуса r = 20 см, свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, с частотой n = 720 об/мин. При торможении маховик останавливается через 20 с. Найти тормозящий момент и число оборотов, которые сделает маховик до полной остановки (рис. 8).

Дано:	СИ
$m=5$ кг	
$r=20$ см	0,2 м
$n=720$ об/мин	90 об/с
$\Delta t=20$ с	
M; $N=?$	

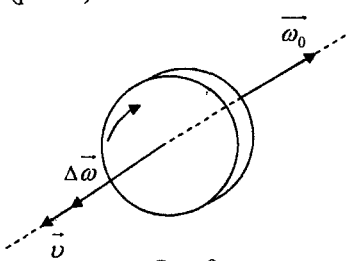

Рис. 8

Решение. Движение маховика равнозамедленное, уравнение динамики вращательного движения можно записать в виде

$$I\Delta\omega=M\Delta t, \qquad (1)$$

где $\Delta\omega=(\omega_t-\omega_0)$ – изменение угловой скорости за интервал Δt.

Из условия задачи следует, что $\omega_t=0$, тогда

$$\Delta\omega=\omega_0=2\pi n,\quad I=mr^2. \qquad (2)$$

Последняя из формул (2) справедлива, поскольку масса маховика распределена по ободу.

Подставив выражения (2) в (1), получим

$$mr^2 \cdot 2\pi n = M\Delta t,$$

откуда

$$M = mr^2 \cdot 2\pi n/\Delta t = 0{,}75 \text{ Н·м}.$$

Очевидно, что векторы $\overrightarrow{M}$ и $\overrightarrow{\Delta\omega}$ направлены в сторону, противоположную вектору $\overrightarrow{\omega_0}$.

Угловое перемещение, пройденное маховиком до остановки:

$$\Delta\varphi = \omega_0\Delta t - \varepsilon\frac{\Delta t^2}{2}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $\omega_t - \varepsilon\Delta t = 0$, преобразуем выражение (3):

$$\Delta\varphi = \omega_0\,\Delta t/2.$$

Заменив $\Delta\varphi$ и ω_0 соответственно на $2\pi N$ и $2\pi n$, где N – искомое число оборотов, которое маховик сделает до полной остановки, окончательно получим

$$N = n\Delta t/2 = 120 \text{ об}.$$

Ответ: $M = 0{,}75$ Н·м; $N = 120$ об.

§3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Основные формулы

• Импульс (количество движения) материальной точки есть векторная величина:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \qquad (3.1)$$

• Импульс системы материальных точек равен (по определению) векторной сумме импульсов всех частиц, образующих систему:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i. \qquad (3.2)$$

• Центром инерции системы материальных точек называется точка C, положение которой в пространстве определяется радиус-вектором, имеющим начало в произвольной точке O и равным

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}, \qquad (3.3)$$

здесь m_i – масса i-й материальной точки; r_i – её радиус-вектор с началом в той же точке O; M – масса всей системы.

• Импульс системы материальных точек равен произведению массы M системы на скорость движения $\vec{\upsilon}_C$ её центра инерции:

$$\vec{p} = M\vec{\upsilon}_C. \qquad (3.4)$$

• Систему взаимодействующих тел называют замкнутой, если на неё извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы есть величина постоянная, то есть

$$\vec{p} = \text{const}. \tag{3.5}$$

• Работа, совершаемая силой $\vec{F}$ при элементарном перемещении $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\,\Delta s\cos\alpha, \tag{3.6}$$

где $\Delta s = |\,\Delta r\,|$ – элементарный путь; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$.

• Работа переменной силы $\vec{F}$ на пути s:

$$A = \int_0^s F\cos\alpha\, ds. \tag{3.7}$$

• Изменение полной энергии системы равно работе, совершённой внешними силами, приложенными к системе:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внеш}}. \tag{3.8}$$

• Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно со скоростью υ:

$$W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{3.9}$$

• Потенциальная энергия тела, поднятого вблизи поверхности Земли на высоту h:

$$W_{\text{п}} = mgh. \tag{3.10}$$

• Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}, \tag{3.11}$$

где k – коэффициент упругости, определяемый отношением упругой силы к величине x упругой деформации.

• Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная, то есть энергия гравитационного воздействия

$$W_{\text{г}} = -G\frac{m_1 m_2}{r};$$

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}. \tag{3.12}$$

3.2. Примеры решения задач

Задача 3.1. Снаряд, летевший на высоте $H = 40$ м горизонтально со скоростью $\upsilon = 100$ м/с, разрывается на две равные части. Одна часть снаряда спустя время $t = 1$ с падает на землю точно под местом взрыва. Определить скорость другой части снаряда сразу после взрыва.

Дано:
$H = 40$ м
$\upsilon = 100$ м/с
$m_1 = m_2$
$t = 1$ с

$U_2 = ?$

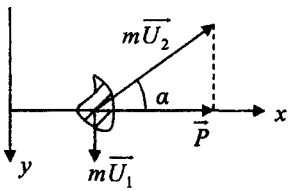

Рис. 9

Скорость каждой части снаряда изменяется под действием сил давления газов, образующихся при взрыве. Эти силы настолько велики, что в сравнении с ними действием всех других сил (тяжести, сопротивления воздуха) можно пренебречь. В этом случае систему можно считать замкнутой в течение времени взрыва. Следовательно, вектор импульса системы во время взрыва постоянен:

$$\overrightarrow{P_I} = \overrightarrow{P_{II}}. \qquad (1)$$

До взрыва импульс системы направлен горизонтально $\overrightarrow{P_I} = 2m\vec{\upsilon}$ (m – масса одной части снаряда). После взрыва импульс системы равен векторной сумме импульсов обеих частей снаряда:

$$\overrightarrow{P_{II}} = m\overrightarrow{U_1} + m\overrightarrow{U_2},$$

где $\overrightarrow{U_1}$ и $\overrightarrow{U_2}$ – скорости соответственно первой и второй частей снаряда сразу после взрыва. В соответствии с условием вектор $\overrightarrow{U_1}$ направлен вертикально, модуль и направление скорости первой части снаряда можно найти из закона движения этой части снаряда после взрыва (рис. 9). Тогда скорость $\overrightarrow{U_2}$ можно найти из закона сохранения импульса (1).

Решение. Введём оси координат так, чтобы направление одной из них совпадало с направлением движения снаряда до взрыва – $0x$. Запишем уравнение (1) в проекции на оси $0x$ и $0y$:

$$P_{Ix} = 2\,m\,\upsilon; \quad P_{IIx} = mU_2\cos\alpha; \qquad (2)$$

$$P_{Iy} = 0; \quad P_{IIy} = mU_{1y} - mU_2\sin\alpha. \qquad (3)$$

Тогда, учитывая выражения (2) и (3), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2m\upsilon = mU_2\cos\alpha; \\ 0 = mU_{1y} - mU_{2y}\sin\alpha; \end{cases}$$

$$U_2 = \sqrt{4\upsilon^2 + U_1^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{U_{1y}}{2\upsilon}. \qquad (4)$$

Движение первой части снаряда после взрыва – падение с начальной скоростью $U_{0y} = U_{1y}$. Если пренебречь сопротивлением воздуха $H = U_{1y}t + \frac{gt^2}{2}$, тогда

$$U_{1y} = \frac{H}{t} - \frac{gt}{2} = 35 \text{ м/с}.$$

Подставив значение U_{1y} в уравнение (4), получим

$$U_2 = \sqrt{4 \cdot 100^2 + 35^2} = 203 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости U_2 направлен к горизонту под углом

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{35}{2 \cdot 100} = \operatorname{arctg} 0{,}17 = 10°.$$

Ответ: $U_2 = 203$ м/с; $\alpha = 10°$.

Задача 3.2. Пуля массой m_1 =10 г, летящая с горизонтальной скоростью υ = 400 м/с, попадает в мешок, набитый ватой, массой m_2 = 4 кг и висящий на длинном шнуре. Найти высоту, на которую поднимется мешок, и долю кинетической энергии пули, которая будет израсходована на пробивание ваты.

Дано:	СИ
$m_1 = 10$ г	0,01 кг
$\upsilon = 400$ м/с	
$m_2 = 4$ кг	
h; $\frac{\Delta W_к}{W_к} = ?$	

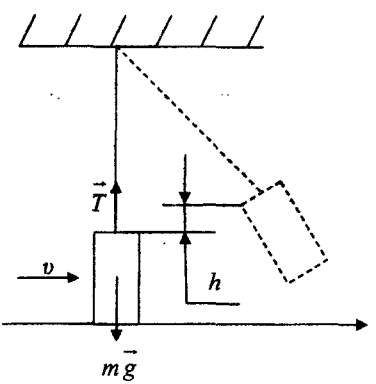

Рис. 10

Решение. В результате попадания пули в мешок с ватой, мешок начинает двигаться по окружности радиуса l (l – длина шнура) с некоторой скоростью U. Во время движения мешка действуют суммарная сила тяжести $(m_1 + m_2)g$ и сила натяжения T шнура. Сила натяжения шнура работы не совершает, так как во всё время движения она перпендикулярна перемещению (рис. 10). Следовательно, к движению мешка, после попадания в него пули, можно применить закон сохранения энергии:

$$\Delta E = \Delta W_п + \Delta W_к = 0;$$

$$\Delta W_n = (m_1 + m_2)gh; \quad \Delta W_к = -(m_1 + m_2)\frac{U^2}{2}, \text{ тогда}$$

$$(m_1 + m_2)gh - (m_1 + m_2)\frac{U^2}{2} = 0. \quad (1)$$

Для нахождения скорости U надо рассмотреть процесс взаимодействия мешка с пулей. В течение кратковременного взаимодействия этих двух тел внешние силы тяжести и натяжения шнура вертикальны и компенсируют друг друга, поэтому проекция импульса системы на горизонтальную ось постоянна:

$$P_{1x} = P_{IIx}; \qquad m_1 \upsilon = (m_1 + m_2)\, U. \quad (2)$$

Скорость мешка после попадания в него пули найдём из уравнения (2):

$$U = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в (1) и произведя соответствующие преобразования, получим

$$h = \frac{\upsilon^2 m_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Долю энергии пули, израсходованную на пробивание ваты, то есть на совершение работы против сил неупругой деформации, можно найти, рассчитав кинетическую энергию системы до и сразу после удара:

$$A = W_{кI} - W_{кII} = \frac{m_1 \upsilon^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2}. \quad (4)$$

Подставляя выражение (3) в (4), получим

$$\Delta W_к = \frac{m_1 \upsilon^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).$$

Тогда доля кинетической энергии, израсходованная на эту работу:

$$\frac{\Delta W_к}{W_{кI}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 99{,}75\ \%.$$

Ответ: $h = 0{,}05$ м; $\frac{\Delta W_к}{W_{кI}} = 99{,}75\ \%$.

Задача 3.3. Тонкий однородный стержень длиной l и массой m может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. Определить угловые ускорения и угловые скорости стержня в начальный момент и при прохождении стержнем положения равновесия. Определить для этих положений стержня модуль и направление силы нормальной реакции N, действующей со стороны оси на стержень.

Дано:
l, m

$\varepsilon; \omega; N_I; N_{II} = ?$

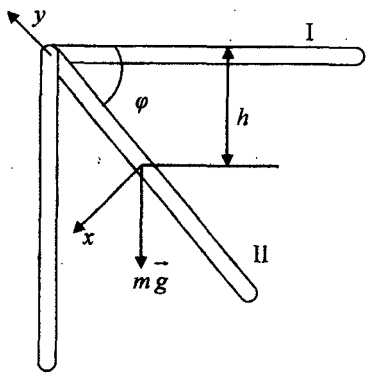

Рис. 11

Стержень совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (рис. 11). Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид

$$I\varepsilon = \overrightarrow{M_{тяж}}. \qquad (1)$$

Решение. Рассмотрим стержень в некоторый момент его движения (положение II). На стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре масс, и сила реакции оси $\vec{N}$. Вращающий момент создаёт только сила тяжести, так как линия действия силы N проходит только через ось вращения:

$$\overrightarrow{M_{тяж}} = m\vec{g}\vec{r}. \qquad (2)$$

Радиус-вектор $\vec{r}$ образует с направлением силы тяжести угол $\alpha = \pi/2 - \varphi$.

Выберем направление осей координат: x – по касательной к траектории центра масс, y – по нормали; тогда уравнение (2) примет вид

$$M_{тяж} = m\,g\,(l/2)\cos\varphi.$$

С учётом выражения для момента инерции стержня:

$$I = \frac{ml^2}{3}.$$

Запишем уравнение (1) в скалярном виде:

$$\frac{ml^2}{3}\varepsilon = \frac{mgl}{2}\cos\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon = 3g\cdot\cos\varphi\,/\,(2l). \qquad (3)$$

Как видно из формулы (3), угловое ускорение зависит от угла φ и в процессе движения стержня из горизонтального положения до положения равновесия убывает, не изменяя своего направления:

$$\varepsilon = \varepsilon_{max} = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \quad \text{при } \varphi = 0; \quad \varepsilon = 0 \quad \text{при } \varphi = \pi/2.$$

Угловую скорость стержня можно найти из закона сохранения энергии:

$$\Delta W = \Delta W_п + \Delta W_к. \qquad (4)$$

При переходе стержня из положения I в положение II, из (4) значение потенциальной энергии равно взятой с обратным знаком работе сил тяжести:

$$\Delta W_{\text{п}} = -mgh; \qquad \Delta W_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2}; \qquad h = \frac{1}{2} l \sin\varphi,$$

тогда уравнение (4) примет вид

$$I\omega^2 - mgl\sin\varphi = 0,$$

учитывая выражение для I, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\varphi}. \tag{5}$$

Угловая скорость также является функцией угла φ. При движении стержня из горизонтального положения ($\varphi = 0$) до положения равновесия ($\varphi = \pi/2$) угловая скорость возрастает от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{\max} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

Стержень, предоставленный самому себе, пройдёт через положение равновесия и будет двигаться дальше. При $\varphi > \pi/2$ угловое ускорение окажется направленным в другую сторону, и движение стержня будет замедленным.

Для нахождения силы N реакции оси рассмотрим движение центра масс стержня, ускорение которого определяется векторной суммой сил, действующих на тело, независимо от точек их приложения:

$$m\vec{a_0} = m\vec{g} + \vec{N}. \tag{6}$$

При движении стержня оси x и y поворачиваются, сохраняя своё направление относительно самого стержня: ось y – вдоль него к оси вращения, ось x – перпендикулярно стержню по касательной к траектории центра масс. Тогда $a_{0x} = a_{0t} = \varepsilon l/2$, $a_{0y} = a_{0n} = \omega^2 l/2$, и векторное уравнение (6) может быть заменено двумя скалярными:

$$\frac{m\varepsilon l}{2} = mg\cos\varphi + N_x, \qquad \frac{m\omega^2 l}{2} = -mg\sin\varphi + N_y, \tag{7}$$

где N_x и N_y – проекции на выбранные оси координат.

Подставим выражение (3) и (5) в (7):

$$N_x = -\frac{1}{4}mg\cos\varphi; \qquad N_y = \frac{5}{2}mg\sin\varphi. \tag{8}$$

Модуль и направление силы реакции могут быть найдены из уравнений (8), поскольку

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}.$$

Угол между вектором $\overline{N}$ и осью y равен $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{N_x}{N_y}\right)$.

При движении стержня сила N изменяется как по абсолютному значению, так и по направлению. При $\varphi = 0$ (начальный момент) $N_y = 0$, $N_x = -mg/4$, то есть $N_1 = mg/4$, вектор $\overline{N_1}$ направлен перпендикулярно вверх. При $\varphi = \pi/2$ (положение равновесия) $N_x = 0$; $N_y = 5mg/2$, то есть $N_2 = 5mg/2$, вектор $\overline{N_2}$ направлен вдоль стержня, опять-таки вертикально вверх.

Ответ:

при $\varphi = 0$	при $\varphi = \pi/2$
$\varepsilon_{max} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$	$\varepsilon = 0$
$\omega = 0$	$\omega_{max} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$
$N_1 = mg/4$	$N_2 = 5mg/2$

Задача 3.4. На скамье Жуковского сидит человек и держит в вытянутых руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи $l_1 = 50$ см. Скамья вращается с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу произведёт человек, если он сожмёт руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $l_2 = 20$ см? Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения $I_0 = 2{,}5$ кг·м^2. Ось вращения проходит через центр масс человека и скамьи.

Дано:	СИ
$m_1 = m_2 = 10$ кг	
$l_1 = l_2 = 50$ см	0,5 м
$n_1 = 1$ с$^{-1}$	
$l' = l'_2 = 20$ см	0,2 м
$I_0 = 2{,}5$ кг·м^2	
n_2; $A = ?$	

Решение. Все тела системы совершают чисто вращательное движение вокруг одной и той же неподвижной оси.

При перемещении гирь относительно оси вращения на систему «скамья – человек – гири» действуют внешние силы: реакции оси, линия действия которых проходит через ось, сила тяжести и сила нормальной реакции, параллельные оси вращения. Моменты всех этих внешних сил относительно оси вращения равны 0. Следовательно, момент импульса этой системы остаётся постоянным:

$$p_1 = p_2; \qquad I_1\overline{\omega_1} = I_2\overline{\omega_2}. \tag{1}$$

Согласно условию все тела системы как до, так и после сближения вращаются с одинаковой угловой скоростью.

Все перечисленные внешние силы не создают вращающего момента относительно оси, следовательно, не совершают работы. Поэтому изменение кинетической системы равно работе, совершенной человеком:

$$A = W_{к2} - W_{к1}. \tag{2}$$

Перепишем векторное уравнение (1) в скалярном виде:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2. \qquad (3)$$

По теореме Штейнера:

$$I_1 = I_0 + 2ml_1^2; \quad I_2 = I_0 + 2ml_2^2,$$

где m – масса каждой гири.

Выражая угловую скорость через частоту вращения по формуле $\omega = 2\pi n$ и подставляя её в уравнение (3), получим

$$\left(I_0 + 2ml_1^2\right)n_1 = \left(I_0 + 2ml_2^2\right)n_2,$$

откуда

$$n_2 = n_1\frac{I_0 + 2ml_1^2}{I_0 + 2ml_2^2} = 2{,}3 \text{ с}^{-1}.$$

Работу, совершённую человеком, рассчитаем по формуле (2). Учитывая, что $\omega_2 = \dfrac{I_1\omega_1^2}{I_2}$, получаем

$$A = \frac{I_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right) = \frac{I_1\omega_1^2}{2I_2}\left(I_1 - I_2\right),$$

$$A = \frac{I_0 + 2ml_1^2}{I_0 + 2ml_2^2}\cdot 2\pi^2 n_1^2 \cdot 2m\left(l_1^2 - l_2^2\right) = 190 \text{ Дж}.$$

Ответ: $n_2 = 2{,}3$ с$^{-1}$; $A = 190$ Дж.

§4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1. Основные формулы

• Уравнение гармонических колебаний:

$$S = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (4.1)$$

где S – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$ – циклическая частота; T – период колебаний; α – начальная фаза.

• Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания:

$$\frac{dS}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (4.2)$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 S. \qquad (4.3)$$

• Кинетическая энергия колеблющейся точки массой m:

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha). \qquad (4.4)$$

• Потенциальная энергия

$$W_{\text{п}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (4.5)$$

• Полная энергия

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (4.6)$$

• Дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0; \quad S = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad (4.7)$$

где β – коэффициент затухания; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $A_0\, e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний.

• Логарифмический декремент затухания колебаний

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \qquad (4.8)$$

где $\tau = \dfrac{1}{\beta}$ – время релаксации; N – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз; $T = 2\pi/\omega$ – период затухающих колебаний.

• Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (4.9)$$

где k – коэффициент упругости ($k = \omega_0^2 m$).

• Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (4.10)$$

• Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}, \qquad (4.11)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника;

$L = \dfrac{I}{ml}$ – приведённая длина физического маятника.

• Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (4.12)$$

где l – длина маятника.

• Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (4.13)$$

где A_1, A_2 – амплитуды складываемых колебаний; α_2 и α_1 – их начальные фазы.

• Начальная фаза результирующего колебания

$$tg = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}. \qquad (4.14)$$

4.2. Примеры решения задач

Задача 4.1. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси $0x$ с периодом T и амплитудой x_0. За какое время, считая от начала движения, она пройдёт расстояние $S = x_0/2$; x_0. Начальная фаза $\alpha_0 = 0$; $\pi/2$.

Дано:
T – период
x_0 – амплитуда
$S = x_0/2$
$\alpha_0 = 0$; $\pi/2$

t_1; t_2 = ?

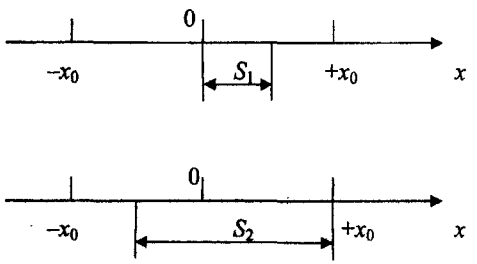

Рис. 12

Материальная точка совершает гармонические колебания (рис. 12) по закону:

$$x = x_0\sin(\omega t + \alpha_0). \qquad (1)$$

Решение. 1. Если $\alpha_0 = 0$, то в начальный момент точка находится в положении равновесия $x_{(0)} = 0$, и путь, пройденный точкой за время $t_1 \le T/4$, будет равен

$$S = x(t). \qquad (2)$$

Подставим в уравнение (2) поочерёдно $S_1 = x_0/2$ и $S_2 = x_0$, выразив при этом $x(t)$ из уравнения (1):

$$x_0/2 = x_0\sin\omega t_1, \quad \text{откуда} \quad \omega t_1 = \pi/6;\ t_1 = \pi/6\omega = T/12;$$

$$x_0 = x_0\sin\omega t_2, \quad \text{откуда} \quad \omega t_2 = \pi/2;\ t_2 = \pi/2\omega = T/4.$$

Таким образом, начиная двигаться из положения равновесия, колеблющаяся точка проходит расстояние $S = x_0$ за время $t_2 = T/4$, причём первую половину пути она проходит за время $t_1 = T/12$, вторую – за время $t_2 - t_1 = T/6$, то есть вдвое медленнее.

2. Если $\alpha_0 = \pi/2$, то в начальный момент движущаяся точка находится в крайнем положении, то есть $x_{(0)} = x_0$, точка будет двигаться в обратном направлении. С возрастанием времени координата x уменьшается, а путь, пройденный точкой, определяется уравнением

$$S = x_0 - x(t). \qquad (3)$$

Подставим поочерёдно в уравнение (3) $S_1 = x_0/2$ и $S_2 = x_0$, выразив $x(t)$ из уравнения (1) с учётом $\alpha_0 = \pi/2$, получим:

$$x_0/2 = x_0 - x_0 \sin(\omega t_1 + \pi/2), \quad \text{откуда} \quad \omega t_1 + \pi/2 = 5\pi/6; \quad t_1 = \pi/3\omega = T/6;$$

$$x_0 = x_0 - x_0 \sin(\omega t_2 + \pi/2), \quad \text{откуда} \quad \omega t_2 + \pi/2 = \pi; \quad t_2 = \pi/2\omega = T/4.$$

Когда точка начинает движение из крайнего положения, то расстояние x_0 она проходит, как и в первом случае, за время $t_2 = T/4$, но теперь первую половину пути точка проходит за время $t_1 = T/6$, а вторую половину – за время $t_2 - t_1 = T/12$, то есть вдвое быстрее.

Ответ: для $\alpha_0 = 0$ $t_1 = T/12$, $t_2 = T/4$;
для $\alpha_0 = \pi/2$ $t_1 = T/6$, $t_2 = T/4$.

Задача 4.2. Материальная точка массой $m = 20$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}4$ Гц. Амплитуда колебаний равна 10 см. Определить: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колебаний точки.

Дано:	СИ
$m = 20$ г	0,02 кг
$\nu = 0{,}4$ Гц	
$A = 10$ см	0,1 м
F_{max}; $E = ?$	

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (1)$$

Тогда скорость и ускорение колеблющейся точки:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$$a = a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку:

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (2)$$

$F = F_{max}$ при $\cos(\omega_0 t + \alpha) = \pm 1$, поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{max} = A\omega_0^2 m. \qquad (3)$$

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = W_к \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (4)$$

Подставив в (3) и (4) $\omega_0 = 2\pi\nu$, получим

$$F_{max} = 4\pi^2\nu^2 Am; \quad E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

Выполнив вычисления, получим

$$F_{max} = 0{,}0126 \text{ Н}; \quad E = 0{,}631 \text{ мДж/}$$

Ответ: $F_{max} = 0{,}0126$ Н; $E = 0{,}631$ мДж.

Задача 4.3. К вертикальной невесомой пружине, верхний конец которой закреплён, подвешен груз массой $m = 0{,}1$ кг. Жёсткость пружины $k = 40$ Н/м. Определить период вертикальных колебаний системы, которые возникнут, если вывести груз из положения равновесия. Определить амплитуду колебаний и начальную фазу, если в момент времени $t = 0$ груз оттянуть вниз на расстояние $x_1 = 10$ см и сообщить ему начальную скорость $\upsilon_1 = 3{,}5$ м/с.

Дано:	СИ
$m = 0{,}1$ кг	
$k = 40$ Н/м	
$x_1 = 10$ см	0,1 м
$\upsilon_1 = 3{,}5$ м/с	
$t_0 = 0$	
$x_0;\ \alpha_0 = ?$	

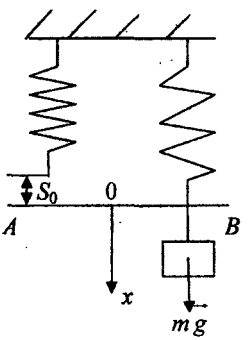

Рис. 13

Если груз отклонить от положения равновесия, а потом отпустить, то груз будет совершать гармонические колебания; при этом действуют две силы (рис. 13): сила тяжести и сила упругости пружины.

Решение. Введём ось $0x$, тогда координата груза x равна смещению конца пружины от прямой АБ – уровня, в котором находится конец пружины в положении равновесия. Полное растяжение пружины $x + S_0$, сила упругости

$$f = -k(x + S_0). \qquad (1)$$

Амплитуду колебаний x_0 можно найти, рассматривая изменение энергии при переходе из положения, в котором система находилась в момент $t = 0$, в положение, при котором $x = x_0$.

Считая систему замкнутой, можно записать

$$\Delta W_к + \Delta W_{тяж} + \Delta W_{упр} = 0. \qquad (2)$$

Найдём каждое из слагаемых, входящих в уравнение (2). В начальном положении ($t = 0$), как следует из условия задачи, $x = x_1$; $\upsilon_x = \upsilon_{1x}$. В конечном положении $x = x_0$; $\upsilon_x = 0$. Следовательно, при этом переходе:

$$\Delta W_к = -\frac{m\upsilon_1^2}{2}, \qquad (3)$$

$$\Delta W_{тяж} = -mg(x_0 - x_1),$$

$$\Delta W_{упр} = \frac{k(x_0 + S_0)^2}{2} - \frac{k(x_1 + S_0)^2}{2}.$$

Рассмотрим отдельно изменение потенциальной энергии системы:

$$\Delta W_{\text{тяж}} + \Delta W_{\text{упр}} = -mg(x_0 - x_1) + \frac{k x_0^2}{2} - \frac{k x_1^2}{2} + kS_0(x_0 - x_1).$$

Учитывая, что в положении устойчивого равновесия $kS_0 = mg$, получим

$$\Delta W_n = \Delta W_{\text{тяж}} + \Delta W_{\text{упр}} = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Найденное изменение потенциальной энергии равно взятой с обратным знаком работе результирующей силы при переходе тела от $x = x_1$ к $x = x_0$.

$$fx = -kx; \quad dA = -kx \cdot dx,$$

$$\Delta W_n = -A \int_{x_1}^{x_0} kx\, dx = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Подставив выражения (3) и (4) в (2), получим

$$-\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = 0,$$

откуда

$$x_0 = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{k} + x_1^2} = 0{,}2 \text{ м}.$$

Запишем выражение для $x(t)$ и $\upsilon_x(t)$:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha_0),$$

$$\upsilon_x = \dot{x} = x_0 \omega \cos(\omega t + \alpha_0).$$

При $t = 0$

$$x_{(0)} = x_0 \sin\alpha_0 = x_1; \quad \upsilon_{x(0)} = x_0\, \omega \cos\alpha_0 = \pm\upsilon_1. \qquad (5)$$

Следовательно, $\alpha_0 = \arcsin\frac{x_1}{x_0} = \frac{\pi}{6}$ (или $\frac{5\pi}{6}$). Знак «+» в выражении (5) соответствует направлению скорости υ_1 вниз. В этом случае $x_0\, \omega \cos\alpha_0 > 0$, значит $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$.

Если скорость υ_1 направлена вверх, то $\upsilon_{1x} = -\upsilon_1$, $x_0 \omega \cos\alpha_0 < 0$. Следовательно, $\alpha_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $x_0 = 0{,}2$ м; $\alpha_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Задача 4.4. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса O находится от центра масс C на расстоянии 20,2 см.

Дано:	СИ
$x = 20{,}2$ см	0,202 м
$\omega = \omega_{max}$	
$l = ?$	

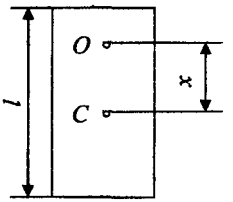

Рис. 14

Решение. Физический маятник совершает колебания под действием силы тяжести относительно оси, не проходящей через центр масс (рис. 14).

Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{I}}, \tag{1}$$

где m – масса маятника; I – момент его инерции.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии x:

$$I = \frac{ml^2}{12} + mx^2. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \tag{3}$$

Найдём экстремум функции (3):

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{6g\left(l^2 - 12x^2\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(l^2 + 12x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Откуда $l^2 - 12x^2 = 0$; $l = 2\sqrt{3x}$.

Подставив значение x, получим $l = 70$ см.

Ответ: $l = 70$ см.

Задача 4.5. Логарифмический декремент затухания колебаний тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$\Theta = 0{,}01$
$A = 0{,}05A_0$

$t; N = ?$

Решение. Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (1)$$

где A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$; β – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \beta T,$$

где $T = \frac{1}{\nu}$ – условный период затухания колебаний. Тогда $\beta = \Theta\nu$.

Выражение (1) запишем в виде

$$A = A_0 e^{-\Theta\nu t},$$

откуда

$$t = \frac{1}{\Theta\nu} \ln \frac{A_0}{A} = 6 \text{ с}.$$

Число искомых полных колебаний

$$N = \frac{t}{T} = t\nu = 300.$$

Ответ: $t = 6$ с; $N = 300$.

§5. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

5.1. Основные формулы

• Закон Бойля – Мариотта:

$$pV = \text{const} \quad \text{при} \quad T = \text{const}; \ m = \text{const},$$

где p – давление; V – объём; T – термодинамическая температура, m – масса газа.

• Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

где p_i – парциальное давление i-го компонента смеси.

• Уравнение состояния идеального газа (Уравнение Клайперона – Менделеева):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p – давление газа; V – его объём; T – абсолютная температура; m – масса; μ – молярная масса; R – молярная (универсальная) газовая постоянная.

• Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры:

$$p = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана ($k = R/Na$, Na – постоянная Авогадро).

• Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2, \quad \text{или} \quad pV = \frac{2}{3} N \left(\frac{m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2}{2} \right) = \frac{2}{3} E,$$

или

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle \upsilon_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle \upsilon_{кв} \rangle^2,$$

где $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул; E – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; $m = N m_0$ – масса газа; N – число молекул в объёме газа V.

• Скорость молекул:

наиболее вероятная

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}};$$

средняя квадратичная

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}};$$

средняя арифметическая

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

где m_0 – масса одной молекулы.

• Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

• Барометрическая формула:

$$p_h = p_0 e^{\frac{-Mg(h-h_0)}{RT}},$$

где p_h и p_0 – давление газа на высоте h и h_0.

• Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle \upsilon \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

• Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

• Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости):

$$F = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости; η – динамическая вязкость:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle l\rangle.$$

§6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Под каким углом φ к горизонту следует бросить камень с вершины горы с уклоном 45°, чтобы он упал на склон на максимальном расстоянии?

2. Атлет толкает ядро с разбега. Считая, что скорость ядра относительно атлета в момент броска равна по величине скорости разбега, найти угол α, под которым следует выпустить ядро по отношению к земле, чтобы дальность полета была максимальной. Высоту самого атлета не учитывать.

3. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t = 3$ с. Какова была начальная скорость υ_0 тела, и на какую высоту h оно поднялось?

4. Камень бросили вертикально вверх на высоту $h_0 = 10$ м. Через какое время t он упадет на землю? На какую высоту h поднимется камень, если начальную скорость камня увеличить вдвое?

5. Тело падает с высоты $h = 19{,}6$ м с начальной скоростью $\upsilon_0 = 0$. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1 с своего движения?

6. Поезд движется со скоростью $\upsilon_0 = 36$ км/ч. Если выключить ток, то поезд, двигаясь равнозамедленно, останавливается через время $t = 20$ с. Каково ускорение a поезда? На каком расстоянии s до остановки надо выключить ток?

7. С башни высотой $h = 36$ м горизонтально брошен камень со скоростью $\upsilon_x = 15$ м/с. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью υ он упадёт на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

8. Мяч брошен со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 40°$ к горизонту. На какую высоту h поднимется мяч? На каком расстоянии l от места бросания он упадет на землю? Какое время t он будет в движении?

9. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время $t = 1{,}25$ с после начала движения.

10. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории тела через время $t = 1$ с после начала движения.

11. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $\omega = 20$ рад/с через $N = 10$ оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение ε колеса.

12. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ оборотов. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

13. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через время $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 10$ см/с.

14. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,1 км друг от друга. Через сколько времени снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели?

15. Снаряд вылетел со скоростью $v = 320$ м/с, сделав внутри ствола $n = 2$ оборотов. Длина ствола $l = 2$ м. Считая движение снаряда в стволе равноускоренным, найти его угловую скорость вращения вокруг оси в момент вылета.

16. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии 30 см от начала пути шарик побывал дважды: через 1 и через 2 секунды после начала движения. Определить начальную скорость и ускорение движения шарика, считая его постоянным.

17. Поезд движется по закруглению с радиусом 400 м, причем его ускорение (тангенциальное) равно 0,2 м/с^2. Определить его нормальное и полное ускорение в тот момент, когда его скорость равна 10 м/с^2.

18. Три самолета выполняют разворот, двигаясь на расстоянии 60 м друг от друга (рис. 15). Средний самолет летит со скоростью 360 км/ч, двигаясь по дуге окружности радиусом 600 м. Определить ускорение каждого самолета.

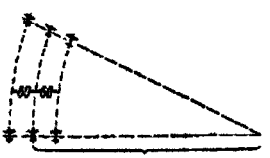

Рис. 15

19. Колесо, вращающееся с частотой 1500 об/мин, при торможении стало вращаться равномерно замедленно и остановилось через 30 секунд. Найти угловое ускорение и число оборотов с момента начала торможения до остановки.

20. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Через сколько времени он будет на высоте: а) $h_1 = 10$ м? б) $h_2 = 12$ м?

21. Камень, брошенный горизонтально на высоте $h = 2$ м над землей, упал на расстоянии $s = 7$ м от места бросания (считая по горизонтали). Найти его начальную и конечную скорости (v_0 и v).

22. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы высота подъема была равна дальности полета?

23. Камень брошен с высоты $h = 2{,}1$ м над поверхностью земли под углом $\alpha = 45°$ к горизонту и упал на землю на расстоянии $s = 42$ м от места бросания, считая по горизонтали. С какой скоростью камень был брошен, сколько времени летел и на какой наибольшей высоте был?

24. Мячик, брошенный с балкона в вертикальном направлении, через $t = 3$ с упал на землю (рис. 16). Определить начальную скорость мячика, если высота балкона над землей равна 14,1 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

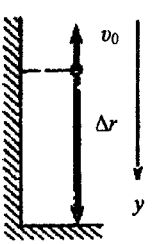

Рис. 16

25. Тело брошено со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость тела, а также его нормальное и тангенциальное ускорения через $t = 1{,}5$ с после начала движения. На какое расстояние l переместится за это время тело по горизонтали и на какой окажется высоте h?

26. Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью $v_1 = 16$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 12$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 5$ км/ч. Определите среднюю скорость движения студента на всем пути.

27. При падении камня в колодец его удар о поверхность воды доносится через $t = 5$ с. Принимая скорость звука $v = 330$ м/с, определите глубину колодца.

28. Тело брошено под углом к горизонту. Оказалось, что максимальная высота подъема $h = s/4$ (s – дальность полета). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите угол броска к горизонту.

29. Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите радиус кривизны траектории тела через $t = 2$ с после начала движения.

30. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с. Определите радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 7{,}5$ м/с^2.

31. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с$^{-1}$ после выключения тока, сделав $N = 628$ оборотов, остановился. Определите угловое ускорение ε якоря.

32. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массой M. Другое тело, массой m, подвешено на нити, перекинутой через блок и привязанной к первому телу. Найти ускорение тел и натяжение нити (рис. 17). Трением тела массы M о плоскость и трением в блоке, а также массами блока и нити пренебречь.

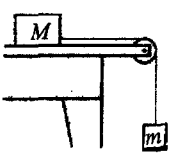

Рис. 17

33. На верхнем краю идеально гладкой наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. На одном ее конце привязан груз массой m_1, лежащий на наклонной плоскости, а на другом подвешен груз массой m_2 (рис. 18). Найти ускорение грузов и натяжение нити. Трением и массами блока и нити пренебречь. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α.

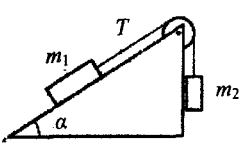

Рис. 18

34. На столе лежит доска массой $M = 1$ кг, а на доске – груз массой $m = 2$ кг. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской 0,25, а между доской и столом – 0,5.

35. При торможении всеми четырьмя колесами тормозной путь автомобиля равен S_0. Найти тормозные пути этого же автомобиля при торможении только передними и только задними колесами. Коэффициент трения скольжения $k = 0{,}8$. Центр масс автомобиля расположен на равном расстоянии от передних и задних колес на высоте $h = l/4$, где l – расстояние между осями.

36. Из зенитной установки выпущен снаряд вертикально вверх со скоростью $v_0 = 600$ м/с. Сила сопротивления воздуха $F = -kv$. Определить максимальную высоту H подъема снаряда и время его подъема τ до этой высоты, если известно, что при падении снаряда с большой высоты его установившаяся скорость $v_1 = 100$ м/с.

37. С палубы яхты, бороздящей океан со скоростью 10 узлов (18 км/ч), принцесса роняет в воду жемчужину массой $m = 1$ г. Как далеко от места падения в воду может оказаться жемчужина на дне океана, если при ее движении в воде сила сопротивления $F = -\beta v$; $\beta = 10^{-4}$ кг/с?

38. Велосипедист при повороте по кругу радиусом R наклоняется внутрь закругления так, что угол между плоскостью велосипеда и землей равен α. Найти скорость v велосипедиста.

39. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус R этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α.

40. На наклонной плоскости с углом α при основании лежит брусок массой M. Груз массой m присоединен к бруску нитью, перекинутой через блок (рис. 19). Определить ускорение груза и натяжение нити. Трением, массой блока и нити пренебрегаем.

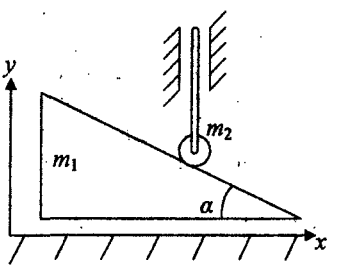

Рис. 19

41. Самолет движется со скоростью 200 м/с по горизонтальной траектории с радиусом кривизны 5 км. Каков угол крена?

42. На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?

43. При каком периоде вращения планеты на ее экваторе будет наблюдаться состояние невесомости? Расчет сделать для Земли.

44. Диск совершает 70 об/мин. Где можно положить на диск тело, чтобы оно не соскользнуло? Коэффициент трения покоя тела о диск $\mu^{\text{пок}} = 0{,}44$.

45. Мотоциклист движется со скоростью 90 км/ч. Каков радиус кривизны дуги, которую мотоциклист описывает при повороте, если коэффициент трения резины об асфальт равен 0,65? Каков угол наклона мотоциклиста к горизонту?

46. Определить вращающий момент на валу электродвигателя мощностью 20 кВт, если его ротор совершает 1 440 об/мин.

47. Какой массы m_x балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $m = 1\,600$ кг, подъемная сила аэростата $F = 12$ кН. Считать силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$ воздуха одной и той же при подъеме и при спуске.

48. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением $a_\tau = 2$ м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разрывается. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась?

49. Поезд массой $m = 500$ т, двигаясь равнозамедленно в течение времени $t = 1$ мин, уменьшает свою скорость от $v_1 = 40$ км/ч до $v_2 = 28$ км/ч. Найти силу торможения F.

50. Поезд массой $m = 500$ т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения $F_{тр} = 98$ кН останавливается через время $t = 1$ мин. С какой скоростью v_0 шел поезд?

51. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A \sin \omega t$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = (1/6)$ с после начала движения.

52. На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силы тяжести mg. Найти силу тяги F, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с ускорением $a = 1$ м/с^2 в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

53. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Пройдя путь $s = 36{,}4$ см, тело приобретает скорость $v = 2$ м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

54. При подъеме груза массой $m = 2$ кг на высоту $h = 1$ м сила F совершает работу $A = 78{,}5$ Дж. С каким ускорением a поднимается груз?

55. Вагон массой $m = 20$ т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $v_0 = 54$ км/ч, под действием силы трения $F_{тр} = 6$ кН через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние s, которое вагон пройдет до остановки.

56. Трамвай движется с ускорением $a = 49$ см/с^2. Найти коэффициент трения k, если известно, что 50 % мощности мотора идет на преодоление силы трения и 50 % – на увеличение скорости движения.

57. Какую массу m бензина расходует двигатель автомобиля на пути $s = 100$ км, если при мощности двигателя $N = 11$ кВт скорость его движения $v = 30$ км/ч? КПД двигателя $\eta = 0{,}22$, удельная теплота сгорания бензина $q = 46$ МДж/кг.

58. Аэростат массой $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх.

59. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

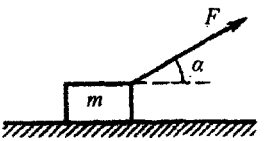

Рис. 20

60. Брусок массой m оттянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k (рис. 20). Найти угол α, при котором натяжение нити минимально. Чему оно равно?

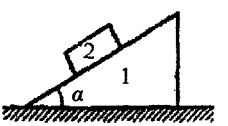

Рис. 21

61. На горизонтальной поверхности находится призма 1 массой m_1 с углом α (рис. 21) и на ней брусок 2 массой m_2. Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

62. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

63. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол отклонения нити в крайнем положении.

64. Мотоциклист едет по вертикальной цилиндрической стенке радиусом $R = 5$ м. Центр масс человека с мотоциклом расположен на $L = 0{,}8$ м от стенки. Коэффициент трения между колесами и стенкой $k = 0{,}34$. С какой минимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной окружности?

65. На подставке лежит гиря массой $m = 1$ кг, подвешенная на недеформированной пружине жесткости $x = 80$ Н/м. Подставку начали опускать с ускорением $a = 5$ м/с^2. Пренебрегая массой пружины, найти максимальное растяжение пружины в этом процессе.

66. Небольшая шайба массой $m = 50$ г начинает скользить с вершины гладкой наклонной плоскости, высота которой $h = 100$ см и угол наклона к горизонту $\alpha = 15°$ (рис. 22). Найти модуль момента импульса шайбы относительно оси О, перпендикулярной плоскости рисунка, через $t = 1{,}3$ с после начала движения.

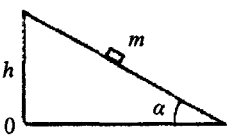

Рис. 22

67. На массивный неподвижный блок радиусом R намотана нить, к свободному концу которой подвешено небольшое тело массой m. В момент $t = 0$ систему предоставили самой себе, и она пришла в движение. Найти ее момент импульса относительно оси блока в зависимости от t.

68. На какой высоте над полюсом Земли ускорение свободного падения убывает на $\eta = 1$ % ? в $n = 2$ раза?

69. Телу сообщили на полюсе Земли скорость v_0, направленную вертикально вверх. Зная радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, найти высоту, на которую поднимается тело.

70. Найти период обращения спутника, движущегося вокруг некоторой планеты вблизи ее поверхности, если средняя плотность планеты $\rho = 3{,}3$ г/см^3.

71. Спутник вывели на круговую орбиту со скоростью v над полюсом Земли. Найти расстояние от спутника до поверхности Земли.

72. Найти массу Земли, если спутник, движущийся в ее экваториальной плоскости с запада на восток по круговой орбите радиуса $R = 2 \cdot 10^4$ км, появляется над некоторым пунктом на экваторе через каждые $\tau = 11{,}6$ ч.

73. Через блок ничтожной массы, вращающийся с малым трением, перекинута нить, на концах которой привязаны грузы m_1 и m_2, причем m_2 в n раз ($n = 2$) больше m_1. Груз m_2 поднимают на столько, чтобы груз m_1 коснулся пола (рис. 23), и отпускают. На какую высоту поднимется груз m_1 после того, как груз m_2 ударится о пол, если высота груза была равна $h_2 = 30$ см?

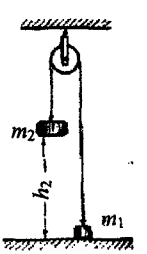

Рис. 23

74. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\alpha = 10°$. По ней пускают снизу вверх камень, который, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения, если время спуска камня в n раз ($n = 2$) больше времени подъема?

75. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2, висит на проволоке груз массой $m = 2$ кг. Определить силу натяжения T проволоки и угол α ее отклонения от вертикали, если груз неподвижен относительно вагона.

76. Груз массой $m = 45$ кг вращается на канате длиной $l = 5$ м в горизонтальной плоскости, совершая $n = 16$ об/мин. Какой угол α с вертикалью образует канат и какова сила его натяжения?

77. Определить ускорения a_1 и a_2, с которыми движутся грузы m_1 и m_2 в установке, изображенной на рис. 24, а также силу натяжения $T_{\text{нити}}$. Трением и массой блоков пренебречь. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

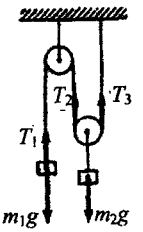

Рис. 24

78. На каком расстоянии от центра Земли должно находиться тело, чтобы силы его притяжения к Земле и Луне взаимно уравновешивались? Считать, что масса M Земли больше массы m Луны в 81 раз, а расстояние между их центрами равно 60 радиусам Земли.

79. К нити подвешен груз массой $m = 500$ г. Определите силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с^2; 2) опускать с ускорением 2 м/с^2.

80. В установке углы α и β наклонных плоскостей с горизонтом соответственно равны 30 и 45° (рис. 25), массы тел $m_1 = 0{,}45$ кг и $m_2 = 0{,}50$ кг. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) силу натяжения нити.

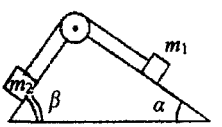

Рис. 25

81. Тело массой $m = 2$ кг падает вертикально с ускорением $a = 5$ м/с^2. Определите силу сопротивления при движении этого тела.

82. По наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, равным 30°, скользит тело. Определите скорость тела в конце второй секунды от начала скольжения, если коэффициент трения $f = 0{,}15$.

83. Система грузов (рис. 25, *а*) массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}6$ кг находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a = 4{,}9$ м/с^2. Определите силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массой m_1 и опорой $f = 0{,}1$.

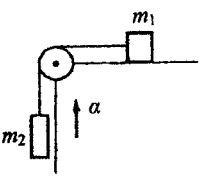

Рис. 25, *а*

84. Снаряд массой $m = 5$ кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость $v = 300$ м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой $m_1 = 3$ кг полетел в обратном направлении со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Определите скорость v_2 второго, меньшего, осколка.

85. Платформа с песком общей массой $M = 2$ т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой $m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определите, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда $v = 450$ м/с, а ее направление – сверху вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту.

86. Автомобиль «Жигули» на скорости $v = 50$ км/ч способен двигаться вверх по дороге с наибольшим уклоном $\alpha = 16°$. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, составляет $N = 20$ л.с. (1 л.с. = 736 Вт). Найти максимальную мощность двигателя, если масса автомобиля 1200 кг.

87. Лодка длины L_0 наезжает, двигаясь по инерции, на отмель и останавливается из-за трения, когда половина ее длины оказывается на суше (рис. 26). Какова была начальная скорость лодки v? Коэффициент трения равен k.

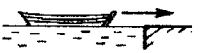

Рис. 26

88. Струя воды выбрасывается из гидромонитора со скоростью 100 м/с. Расход воды равен 144 м^3/ч. Найти мощность насоса, если его КПД равен 75 %.

89. С башни высотой $h = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти кинетическую $W_к$ и потенциальную $W_п$ энергии камня через время $t = 1$ с после начала движения. Масса камня $m = 0{,}2$ кг.

90. На толкание ядра, брошенного под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, затрачена работа $A = 216$ Дж. Через какое время t и на каком расстоянии s_x от места бросания ядро упадет на землю? Масса ядра $m = 2$ кг.

91. Автомобиль массой $m = 2$ т движется в гору с уклоном 4 м на каждые 100 м пути. Коэффициент трения $k = 0{,}08$. Найти работу A, совершаемую двигателем автомобиля на пути $s = 3$ км, и мощность N, развиваемую двигателем, если известно, что путь $s = 3$ км был пройден за время $t = 4$ мин.

92. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки $\Delta T = 10$ Н.

93. Диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 30$ об/мин. На расстоянии $r = 20$ см от оси вращения на диске лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения k между телом и диском, чтобы тело не скатилось с диска?

94. Шоссе имеет вираж с уклоном $\alpha = 10°$ при радиусе закругления дороги $R = 100$ м. На какую скорость v рассчитан вираж?

95. Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на нити, склоняют на угол $\alpha = 30°$ и отпускают. Найти силу натяжения нити T в момент прохождения грузом положения равновесия.

96. Мяч радиусом $R = 10$ см плавает в воде так, что его центр масс находится на $H = 9$ см выше поверхности воды. Какую работу A надо совершить, чтобы погрузить мяч в воду до диаметральной плоскости?

97. Шар диаметром $D = 30$ см плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы погрузить шар в воду на $H = 5$ см глубже? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

98. Льдина площадью поперечного сечения $S = 1$ м^2 и высотой $h = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

99. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. На какой высоте h от поверхности Земли должен находиться этот спутник, чтобы он был неподвижен по отношению к наблюдателю, который находится на Земле?

100. Ствол пушки направлен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в $\eta = 50$ раз меньше массы пушки, $v_0 = 180$ м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса ее освободить.

101. Шайба массой $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 50$ см, останавливается. Найти работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения $k = 0{,}15$.

102. Тело массой m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти среднюю мощность, развиваемую силой тяжести за все время движения тела, и мгновенную мощность этой силы как функцию времени.

103. Брусок массой $m = 1$ кг находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $k = 0{,}27$. В некоторый момент ему сообщили начальную скорость $v_0 = 1{,}5$ м/с. Найти среднюю мощность силы трения за все время движения бруска.

104. Какую мощность развивают двигатели ракеты массы M, которая неподвижно висит над поверхностью Земли, если скорость истечения газов равна u?

105. Небольшое тело A начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$ (рис. 27). Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

Рис. 27

106. Частица 1, имевшая скорость $v = 10$ м/с, испытала лобовое столкновение с покоившейся частицей 2 той же массы. В результате столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась на $\eta = 1$ %. Найти модуль и направление скорости частицы 1 после столкновения.

107. Уклон участка шоссе равен 0,05. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью 60 км/ч. Какова должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он мог подниматься на такой же подъем с той же скоростью? Масса автомобиля 1,5 т.

108. Камень массой 50 г, брошенный под углом к горизонту с высоты 20 м над поверхностью земли со скоростью 18 м/с, упал на землю со скоростью 24 м/с. Найти работу преодоления сопротивления воздуха.

109. Камень массой $m = 200$ г брошен с горизонтальной поверхности под углом к горизонту и упал на нее обратно на расстоянии $s = 5$ м через $t = 1{,}2$ с. Найти работу бросания. Сопротивлением воздуха пренебречь.

110. Какую работу надо произвести, чтобы повернуть на другую грань сплошной железный куб, масса которого равна 200 кг?

111. Тело массой $m = 5$ кг поднимают с ускорением $a = 2$ м/с^2. Определите работу силы в течение первых пяти секунд.

112. Определите работу, совершаемую при подъеме груза массой $m = 50$ кг по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту на расстояние $s = 4$ м, если время подъема $t = 2$ с, а коэффициент трения $f = 0{,}06$.

113. Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным f, определите расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке до полной остановки.

114. Поезд массой $m = 600$ т движется под гору с уклоном $\alpha = 0{,}3°$ и за время $t = 1$ мин развивает скорость $v = 18$ км/ч. Коэффициент трения $f = 0{,}01$. Определите среднюю мощность $\langle N \rangle$ локомотива.

115. С башни высотой $H = 20$ м горизонтально со скоростью $v_0 = 10$ м/с брошен камень массой $m = 400$ г. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1$ с после начала движения: 1) кинетическую энергию; 2) потенциальную энергию.

116. Материальная точка массой $m = 20$ г движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения кинетическая энергия материальной точки оказалась равной 6,3 мДж. Определите тангенциальное ускорение.

117. Ядро массой $m = 5$ кг бросают под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, совершая при этом работу 500 Дж. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) через какое время ядро упадет на землю; 2) какое расстояние по горизонтали оно пролетит.

118. Определите работу, которую необходимо затратить, чтобы сжать пружину на 15 см, если известно, что сила пропорциональна деформации и под действием силы 20 Н пружина сжимается на 1 см.

119. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, попадает в покоящийся на горизонтальном столе металлический шар массой M и радиусом R на расстоянии $R/2$ выше центра шара и рикошетом отскакивает от него вертикально вверх (рис. 28). Спустя некоторое время движение шара по столу переходит в равномерное качение со скоростью v_1. Определить скорость пули после удара по шару.

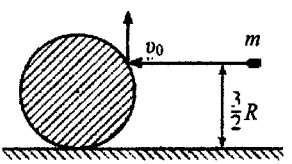

Рис. 28

120. Однородный стержень длиной L падает, скользя концом по абсолютно гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень покоился в вертикальном положении. Определить скорость центра тяжести в зависимости от его высоты h над полом.

121. Через неподвижный блок с моментом инерции I (рис. 29) и радиусом r перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массой m. Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если коэффициент упругости пружины равен k, а нить не может скользить по поверхности блока.

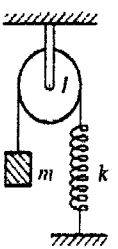

Рис. 29

122. Диск с вырезом (рис. 30) имеет массу m. Определить момент инерции относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости диска.

123. С какой угловой скоростью должен вращаться вокруг своей оси космический корабль, чтобы космонавт чувствовал себя как в поле тяжести Луны, где ускорение свободного падения в 6 раз меньше, чем на Земле? Диаметр корабля считать равным 6 м.

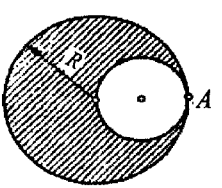

Рис. 30

124. Маховик, момент инерции которого $J = 63{,}6$ кг·м^2, вращается с угловой скоростью $\omega = 31{,}4$ рад/с. Найти момент сил торможения M, под действием которого маховик останавливается через время $t = 20$ с. Маховик считать однородным диском.

125. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

126. Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $\upsilon = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ диска.

127. Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0{,}25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ шара.

128. Диск диаметром $D = 60$ см и массой $m = 1$ кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости, с частотой $n = 20$ об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

129. Найти кинетическую энергию $W_к$ велосипедиста, едущего со скоростью $\upsilon = 9$ км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 78$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

130. К ободу диска массой $m = 5$ кг приложена касательная сила $F = 19{,}6$ Н. Какую кинетическую энергию $W_к$ будет иметь диск через время $t = 5$ с после начала действия силы?

131. Обруч диаметром $D = 56{,}5$ см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний T обруча.

132. Человек массой $m = 60$ кг идет равномерно по периферии горизонтальной круглой платформы радиусом $R = 3$ м, которую вращают с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти горизонтальную составляющую силы, действующей на человека со стороны платформы, если результирующая сил инерции, приложенных к нему в системе отсчета «платформа», равна нулю.

133. Гладкий горизонтальный диск вращают с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В центре диска поместили небольшую шайбу массой $m = 60$ г и сообщили ей толчком горизонтальную скорость $\upsilon_0 = 2{,}6$ м/с. Найти модуль силы Кориолиса, действующей на шайбу в системе отсчета «диск» через $t = 0{,}5$ с после начала ее движения.

134. Некоторая планета массой M движется по окружности вокруг Солнца со скоростью $\upsilon = 34{,}9$ км/с (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Найти период обращения этой планеты вокруг Солнца.

135. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез (рис. 31). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей: а) через точку О; б) через его центр масс.

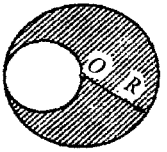

Рис. 31

136. Однородный сплошной цилиндр массой m лежит на двух горизонтальных брусьях. На цилиндр намотана нить, за свешивающийся конец которой тянут с постоянной, вертикально направленной силой F (рис. 32). Найти значения силы F, при которых цилиндр будет катиться без скольжения, если коэффициент трения равен k.

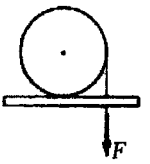

Рис. 32

137. Однородный шар радиусом r скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R. Найти угловую скорость шара после отрыва от сферы. Начальная скорость шара пренебрежимо мала.

138. Небольшое тело скользит с вершины сферы вниз (рис. 33). На какой высоте h от вершины тело оторвется от поверхности сферы и полетит вниз? Трение ничтожно мало.

Рис. 33

139. С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиусом $R = 90$ м, если коэффициент статического трения резины о почву $\mu = 0{,}4$? На какой угол α от вертикального направления он должен при этом отклониться?

140. Двигатель равномерно вращает маховик. После отключения двигателя маховик делает в течение $t = 30$ сек $N = 120$ оборотов и останавливается. Момент инерции маховика $J = 0{,}3$ кг·м^2. Принимая, что угловое ускорение маховика после отключения двигателя постоянно, определить мощность двигателя при равномерном вращении маховика.

141. Какую работу нужно произвести, чтобы увеличить частоту оборотов маховика, массу которого 0,5 т можно считать распределенной по ободу диаметром 1,5 м от 0 до 120 мин$^{-1}$? Трением пренебречь.

142. Шарик, диаметр которого равен $d = 6$ см, катится по полу и останавливается через $t = 2$ с, пройдя расстояние $s = 70$ см. Определить коэффициент трения качения, считая его постоянным.

143. На горизонтальную ось насажен шкив радиусом R. На шкив намотан шнур, к свободному концу которого подвесили гирю массой m (рис. 34). Считая массу M шкива равномерно распределенной по ободу, определить ускорение a, с которым будет опускаться гиря, силу натяжения T нити и силу давления N шкива на ось.

144. К ободу однородного сплошного диска массой $m = 10$ кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила $F = 30$ Н. Определите кинетическую энергию через время $t = 4$ с после начала действия силы.

145. Сплошной однородный диск скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите линейное ускорение a центра диска.

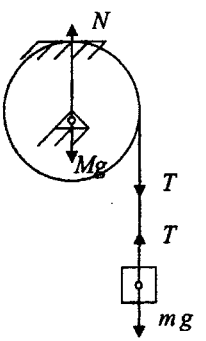

Рис. 34

146. К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{тр} = 2$ Н м. Определите массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2.

147. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 50$ см намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 6{,}4$ кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 2$ м/с^2. Определите: 1) момент инерции J вала; 2) массу m_1 вала.

148. Маховик начинает вращаться из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}4$ рад/с^2. Определите кинетическую энергию маховика через время $t_2 = 25$ с после начала движения, если через $t_1 = 10$ с после начала движения момент импульса L_1 маховика составлял 50 кг·м^2/с.

149. Три лодки с одинаковой массой m идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массой m_1. Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

150. Ствол пушки направлен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в $\eta = 50$ раз меньше массы пушки, $v_0 = 180$ м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса ее освободить.

151. Две одинаковые тележки движутся друг за другом без трения с одной и той же скоростью v_0. На задней тележке находится человек массой m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью u относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

152. Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью $u = 900$ м/с. Найти: а) время, которое ракета может оставаться в состоянии покоя, если начальная масса топлива составляет $\eta = 25$ % ее массы (без топлива); б) массу газов $\mu(t)$, которую должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты (с топливом) равна m_0.

153. В системе отсчета, вращающейся вокруг неподвижной оси с $\omega = 5$ рад/с, движется небольшое тело массой $m = 100$ г. Какую работу совершила центробежная сила инерции при перемещении этого тела по произвольному пути из точки 1 в точку 2, которые расположены на расстояниях $r_1 = 30$ см и $r_2 = 50$ см от оси вращения?

154. На нити длиной l подвешен шарик массой m. С какой наименьшей скоростью надо перемещать точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы шарик стал двигаться по окружности вокруг этой точки? Какова при этом сила натяжения нити в момент, когда она будет проходить горизонтальное положение?

155. Гладкая упругая нить длиной l и жесткостью x подвешена одним концом к точке О. На нижнем конце имеется невесомый упор. Из точки О начала падать небольшая муфта массой m. Найти: а) максимальное растяжение нити; б) убыль механической энергии системы к моменту установления равновесия (из-за сопротивления воздуха).

156. Снаряд, выпущенный со скоростью $v_0 = 100$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, разорвался в верхней точке О траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю под точкой О со скоростью $v_1 = 97$ м/с. С какой скоростью упал на землю второй осколок?

157. Две одинаковые тележки 1 и 2, на каждой из которых находится по одному человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек – перпендикулярно движению тележек. В результате тележка 1 остановилась, а скорость тележки 2 стала равна v. Найти первоначальные скорости тележек v_1 и v_2, если масса каждой тележки (без человека) M, а масса каждого человека m.

158. Ракета движется в отсутствии внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью u, постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты v в момент, когда ее масса равна m, если в начальный момент она имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю.

159. В результате упругого лобового столкновения частицы 1 массой m_1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2.

160. Снаряд, летящий со скоростью $v = 500$ м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы увеличивается в $\eta = 1{,}5$ раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

161. Частица 1, имевшая скорость $v = 10$ м/с, испытала лобовое столкновение с покоившейся частицей 2 той же массы. В результате столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась на $\eta = 1$ %. Найти модуль и направление скорости частицы 1 после столкновения.

162. Однородный шар массой $m = 5$ кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через $t = 1{,}6$ с после начала движения.

163. Однородный стержень длиной $l = 110$ см расположен под углом $\alpha = 60°$ к гладкой горизонтальной поверхности, на которую он опирается своим нижним концом. Стержень без толчка отпустили. Найти скорость верхнего конца стержня непосредственно перед падением его на поверхность.

164. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен (рис. 35). Масса данной катушки $m = 200$ г, ее момент инерции относительно собственной оси $I = 0{,}45$ г·м^2, радиус намотанного слоя ниток $r = 3$ см. Найти ускорение оси катушки.

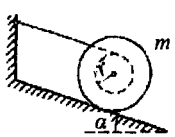

Рис. 35

165. Стальной шарик падает на горизонтальную поверхность стола с высоты 25,6 см и, отскочив, поднимается на высоту 19,6 см. Масса шарика 10 г. Какова средняя сила, с которой шарик действовал на стол при ударе, если соприкосновение шарика со столом длилось $1 \cdot 10^{-4}$ секунд?

166. Молот массой 1,5 т ударяет по раскаленной болванке, лежащей на наковальне, и деформирует болванку. Масса наковальни вместе с болванкой равна 20 т. Определить коэффициент полезного действия при ударе молота, считая удар неупругим.

Примечание. Считать работу, произведенную при деформации болванки, полезной, а работу сотрясения фундамента – бесполезной.

167. Три одинаковых упругих шарика висят, касаясь друг друга, на трех параллельных нитях одинаковой длины. Один из шариков отклоняют по направлению, перпендикулярному к прямой, соединяющей центры двух других шариков, и отпускают, причем он приобретает скорость v. Каковы скорости шариков после удара?

168. Шар, радиус которого равен r, скатывается по наклонному скату и описывает мертвую петлю радиусом R. Пренебрегая трением качения и сопротивлением воздуха, найти наименьшую высоту h центра шарика над центром петли, при которой это возможно.

169. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью v, укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол α (рис. 36). Орудие произвело выстрел, в результате чего скорость платформы с орудием уменьшилась в 3 раза. Найти скорость v' снаряда (относительно орудия) при вылете из ствола. Масса снаряда m, масса платформы с орудием M.

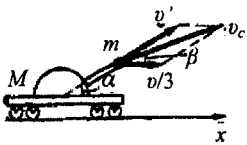

Рис. 36

170. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на $x_0 = 1$ мм. На сколько сожмет пружину эта же гиря, брошенная вертикально вниз с высоты $h = 0{,}2$ м со скоростью $v = 1$ м/с?

171. Молот массой $m = 5$ кг, двигаясь со скоростью $v = 4$ м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием равна $M = 95$ кг. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Чему равен КПД процесса ковки при данных условиях?

172. Тонкий однородный стержень длиной l может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно ему. Стержень отклонили на 90° от положения равновесия и отпустили. Определить скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

173. Круглая платформа радиусом $R = 1$ м, момент инерции которой $I = 130$ кг·м^2, вращается по инерции вокруг вертикальной оси, делая $n_1 = 1$ об/с. На краю платформы стоит человек, масса которого $m = 70$ кг. Сколько оборотов в секунду n_2 будет совершать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

174. Ракета, летевшая над поверхностью Земли на высоте h, в результате кратковременного действия мощной тормозной установки останавливается. С какой скоростью упадет ракета на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

175. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии.

176. Подвешенный на нити шарик массой $m = 200$ г отклоняют на угол $\alpha = 45°$. Определите силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

177. Пренебрегая трением, определите наименьшую высоту h, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом $R = 6$ м, и не оторваться от него в верхней точке петли.

178. Гиря массой $m = 10$ кг падает с высоты $h = 0{,}5$ м на подставку, скрепленную с пружиной жесткостью $k = 30$ Н/см. Определите при этом смещение x пружины.

179. Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 200$ м/с, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$ м и массой $M = 1{,}5$ кг и застревает в нем. Определите угол отклонения φ маятника.

180. Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v = 2$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе.

181. Два шара массами $m_1 = 9$ кг и $m_2 = 12$ кг подвешены на нитях длиной $l = 1{,}5$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 30°$ и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара.

182. Два шара массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 400$ г подвешены на нитях длиной $l = 67{,}5$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем первый шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. Считая удар упругим, определите, на какую высоту h поднимется второй шар после удара.

183. Полый тонкостенный цилиндр массой $m = 0{,}5$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стену и откатывается от нее. Скорость цилиндра до удара о стену $v_1 = 1{,}4$ м/с, после удара $v_1' = 1$ м/с. Определите выделившееся при ударе количество теплоты.

184. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определите время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что его центр масс при скатывании понизился на 30 см.

185. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью $v = 1{,}5$ м/с. Определите путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5 м на каждые 100 м пути.

186. Два вагона (масса каждого $m = 15$ т) движутся навстречу друг другу со скоростью $v = 3$ м/с и сталкиваются между собой. Определите сжатие пружины буферов вагонов, если известно, что сила пропорциональна деформации, и под действием силы $F = 50$ кН пружина сжимается на $\Delta l = 1$ см.

187. Струя воды сечением $S = 6$ см^2 ударяется о стенку под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти силу F, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе $v = 12$ м/с.

188. Мяч, летящий со скоростью $v = 15$ м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Найти изменение импульса $m\Delta v$ мяча, если известно, что изменение его кинетической энергии $\Delta W_к = 8{,}75$ Дж.

189. Граната, летящая со скоростью $v = 10$ м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0,6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью $u_1 = 25$ м/с. Найти скорость u_2 меньшего осколка.

190. Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 2$ кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания ее скорость была $v = 0{,}1$ м/с. Масса тележки с человеком $M = 100$ кг. Найти кинетическую энергию $W_к$ брошенного камня через время $t = 0{,}5$ с после начала его движения.

191. Из орудия массой $m_1 = 5$ т вылетает снаряд массой $m_2 = 100$ кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $W_{к2} = 7{,}5$ МДж. Какую кинетическую энергию $W_{к1}$ получает орудие вследствие отдачи?

192. Два тела движутся навстречу друг другу и соударяются неупруго. Скорости тел до удара были $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Общая скорость тел после удара $u = 1$ м/с и по направлению совпадает с направлением скорости v_1. Во сколько раз кинетическая энергия $W_{к1}$ первого тела была больше кинетической энергии $W_{к2}$ второго тела?

193. Камень массой $m = 0{,}5$ кг, привязанный к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки в нижней точке окружности $T = 44$ Н. На какую высоту h поднимется камень, если веревка обрывается в тот момент, когда скорость направлена вертикально вверх?

194. Груз массой $m = 1$ кг падает на чашку весов с высоты $H = 10$ см. Каковы показания весов F в момент удара, если после успокоения качаний чашка весов отпускается на $h = 0{,}5$ см?

195. Шар массой $m = 1$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $v = 10$ см/с, после удара $u = 8$ см/с. Найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе шара о стенку.

196. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ оборотов. Работа сил торможения $A = 44{,}4$ Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

197. Маховое колесо, момент инерции которого $J = 245$ кг·м^2, вращается с частотой $n = 20$ об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав $N = 1\,000$ оборотов. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента до остановки колеса.

198. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через время $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса $L = 73{,}5$ кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ колеса через время $t_2 = 20$ с после начала движения.

199. Карандаш длиной $l = 15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будут иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

200. Человек массой $m_0 = 60$ кг находится из неподвижной платформе массой $m = 100$ кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $v_0 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

201. На горизонтальном деревянном столе лежит деревянный брусок массой 5 кг. В брусок попадает пуля массой 9 г, после чего он проходит по столу расстояние 25 см и останавливается. Найти скорость пули.

202. Масса лодки $M = 80$ кг, масса мальчика $m = 36$ кг. Мальчик переходит с кормы на нос лодки. На какое расстояние переместится лодка, если ее длина $l = 2{,}8$ м? При столь малых скоростях можно пренебречь сопротивлением воды.

203. Найти начальное ускорение ракеты, если ее начальная масса 40 т, скорость истечения газов 4 км/с и расход топлива 200 кг/с.

204. Стартовая масса ракеты $M_0 = 160$ т, скорость истечения газов 4 км/с. После того как выгорело 90 т топлива, отбрасывается первая ступень массой 30 т. Затем выгорает еще 28 т топлива. Какова конечная скорость второй ступени?

205. На нити длиной l висит груз. Какова начальная скорость, которую ему надо сообщить в нижней точке, чтобы он смог сделать полный оборот? Массой нити пренебречь.

206. Свинцовая пуля пробивает доску, при этом ее скорость падает с 400 до 200 м/с. Какая часть пули расплавится? Нагреванием доски пренебречь. Начальная температура около 30 °С.

207. Шарик массой m подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с коэффициентами упругости k_1 и k_2 (рис. 37). Определить период его вертикальных колебаний.

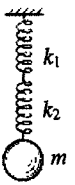

Рис. 37

208. На доске лежит груз массой 1 кг. Доска совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом $T = 1/2$ с и амплитудой $A = 1$ см. Определить величину силы давления F груза на доску.

209. Середина струны колеблется с частотой 200 Гц и с амплитудой 3 мм. Найти наибольшее ускорение.

210. Некоторое тело качается около оси с периодом $T_1 = 0{,}5$ с. Если же к нему прикрепить грузик массой $m = 50$ г на расстоянии $l = 10$ см ниже оси, то оно качается с периодом $T = 0{,}6$ с. Найти момент инерции тела относительно оси качания.

211. Начальная амплитуда колебания маятника равна 3 см. Через 10 с она равна 1 см. Через сколько времени амплитуда колебаний будет равна 0,3 см?

212. Каков логарифмический декремент затухания маятника длиной 0,8 м, если его начальная амплитуда 5°, а через 5 мин амплитуда равна 0,5°?

213. При какой скорости поезда рессоры его вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес о стыки рельс, если длина рельс 12,5 м, нагрузка на рессору равна 5,5 T, и если рессора прогибается на 16 мм при нагрузке в одну тонну?

214. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\lambda_0 = 1{,}5$. Каким будет значение λ, если сопротивление среды увеличить в $n = 2$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

215. К пружине подвесили грузик, и она растянулась на $\Delta x = 9{,}8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\lambda = 3{,}1$.

216. Найти добротность математического маятника длиной $l = 50$ см, если за $\tau = 5{,}2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз.

217. Маятниковые часы идут на поверхности Земли точно. На сколько они отстанут за сутки, если их поднять на сотый этаж высотного дома? Высота этажа 3 м.

218. Период маятника, покоящегося относительно земной поверхности, равен 1,5 с. Каков будет его период, если поместить маятник в вагон, движущийся горизонтально с ускорением 4,9 м/с^2?

219. Однородный стержень длиной L колеблется около оси, проходящей через его конец. Найти период колебаний и приведенную длину этого маятника.

220. Точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi = 0$. Найти скорость v точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм.

221. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки $a_{max} = 49{,}3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм.

222. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = 30$ мкДж; максимальная сила, действующая на тело, $F_{max} = 1{,}5$ мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза $\varphi = \pi/3$.

223. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $W = 0{,}3$ мкДж. При каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 22{,}5$ мкН?

224. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F = 9{,}8$ Н растягивается на $l = 1{,}5$ см, найти период T вертикальных колебаний груза.

225. К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{к\,max} = 1$ Дж. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Найти жесткость k пружины.

226. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний $T_1 = 0{,}5$ с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равным $T_2 = 0{,}6$ с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?

227. Период затухающих колебаний $T = 4$ с; логарифмический декремент затухания $\chi = 1{,}6$; начальная фаза $\varphi = 0$. При $t = T/4$ смещение точки $x = 4{,}5$ см. Написать уравнение движения этого колебания. Построить график этого колебания в пределах двух периодов.

228. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\chi = 0{,}2$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

229. Найти логарифмический декремент затухания χ математического маятника, если за время $t = 1$ мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника $l = 1$ м.

230. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t = 1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t = 3$ мин?

231. Определите максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и периодом $T = 4$ с.

232. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 8$ см. Определите жесткость k пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия T_{max} груза составляет 0,8 Дж.

233. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определите, тело какой массой m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось 25 колебаний.

234. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определите массу первоначально подвешенного груза.

235. Однородный диск радиусом $R = 20$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l = 15$ см от центра диска. Определите период T колебаний диска относительно этой оси.

236. Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определите период T колебаний обруча.

237. Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $x = 15$ см от его середины. Определите период колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

238. Сосуд разделен на две равные части полупроницаемой неподвижной перегородкой. В первую половину сосуда введена смесь аргона и водорода при давлении $P = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, во второй половине вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. После окончания процесса диффузии давление в первой половине оказалось равным $P_1 = 10^5$ Па. Во время процесса температура поддерживалась постоянной. Определите отношение масс аргона и водорода в смеси, которая была первоначально введена в первую половину сосуда.

239. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью диссоциировал на атомы, а диссоциацией водорода еще можно пренебречь, давление в сосуде равно P. При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциировали, давление в сосуде равно $3P$. Каково отношение чисел атомов азота и водорода в смеси?

240. В сосуде постоянного объема находится кислород (O_2). После того, как в сосуде был осуществлен электрический разряд, половина молекул кислорода распалась на атомы, а температура газа выросла вдвое. Как изменилось давление?

241. В сосуде вместимостью $V = 1$ дм^3 находится углекислый газ массой $m = 0{,}2$ г. При температуре $T = 2600$ К некоторая часть молекул CO_2 диссоциировала на молекулы оксида углерода и кислорода: $2CO_2 \leftrightarrow 2CO + O_2$. При этом давление в сосуде оказалось равным $P = 108$ кПа. Найдите степень диссоциации CO_2 при этих условиях.

242. В комнате вместимостью $V = 60$ м^3 испарили капельку духов, содержащую $m = 10^{-4}$ г ароматического вещества. Сколько молекул ароматического вещества попадает в легкие человека при каждом вдохе? Объем вдыхаемого воздуха $V_в = 1$ дм^3. Молярная масса ароматического вещества $\nu = 1$ кг/моль.

243. Найдите среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при температуре $t = 100$ °С.

244. Стеклянная, запаянная с одного конца трубка открытым концом опущена в сосуд с ртутью. После подъема трубки уровни ртути в сосуде и трубке совпадают. При этом длина части трубки, занятой воздухом, $l = 100$ см. Затем трубку поднимают на 10 см. Какой будет после этого высота уровня ртути в трубке, если атмосферное давление $p_0 = 1{,}05 \cdot 10^5$ Па? Капиллярными явлениями пренебречь.

245. В двух сосудах объемом $V_1 = 5$ л и $V_2 = 7$ л находится воздух под давлением $p_1 = 2$ атм и $p_2 = 1$ атм. Температура в обоих сосудах одинакова. Какое давление установится, если сосуды соединить между собой? Температура воздуха не меняется.

246. В баллоне емкостью $V = 20$ л находятся 5 г водорода и 10 г азота при температуре $t = 17$ °С. Определите: а) давление в баллоне; б) молярную массу и плотность смеси газов.

247. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд делится на две части подвижным поршнем. Каково будет положение поршня, если одну часть сосуда заполнили кислородом, а другую часть – такой же массой водорода? Длина сосуда 85 см.

248. В сосуде объемом 20 л содержится 10 г азота и 20 г углекислого газа при температуре 300 К. Определите: а) молярную массу смеси; б) давление в сосуде; в) давление после нагревания смеси до 400 К.

249. В баллон, емкость которого 450 л, нагнетают воздух при помощи компрессора. При каждом ходе поршня захватывается 4 л воздуха при атмосферном давлении и при температуре 7 °С. Температура внутри баллона 27 °С. Предохранительный клапан, прикрывающий отверстие площадью $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2, удерживается силой 100 Н. Сколько качаний можно сделать, пока клапан не начнет пропускать воздух? Какова при этом будет плотность воздуха в баллоне? Массой воздуха, находившегося в баллоне первоначально, можно пренебречь.

250. Три баллона емкостью 3, 7 и 5 л наполнены соответственно: кислородом ($p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па), азотом ($p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па) и углекислым газом ($p_3 = 6 \cdot 10^4$ Па) при одной и той же температуре. Каково будет давление смеси газов, если баллоны соединить между собой? Процесс считать изотермическим.

251. Сухой атмосферный воздух состоит из азота (78,09 % от общей массы), кислорода (20,95 %), аргона (0,93 %) и углекислого газа (0,03 %). Пренебрегая ничтожными примесями других газов, определите: а) среднюю молярную массу атмосферного воздуха и б) парциальные давления составляющих газов. Давление воздуха $p = 10^5$ Па.

252. В сосуде находится смесь азота массой $m_1 = 14$ г и водорода массой $m_2 = 9$ г при температуре $t = 10$ °С и давлении $p = 1$ МПа. Найти молярную массу μ смеси и объём V сосуда.

253. Найти число молекул n водорода в единице объема сосуда при давлении $p = 266{,}6$ Па, если средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 2{,}4$ км/с.

254. Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}06$ кг/м^3, средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 500$ м/с. Найти давление p, которое газ оказывает на стенки сосуда.

255. Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки $m = 10^{-8}$ г. Воздух считать однородным газом, молярная масса которого $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

256. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 450$ м/с. Давление газа $p = 50$ кПа. Найти плотность ρ газа при этих условиях.

257. Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}082$ кг/м^3 при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 17$ °С. Найти среднюю квадратичную скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

258. Найти внутреннюю энергию W кислорода массой $m = 20$ г при температуре $t = 10$ °С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая часть – на долю вращательного движения?

259. Найти энергию $W_{вр}$ вращательного движения молекул, содержащихся в массе $m = 1$ кг азота при температуре $t = 7$ °С.

260. Найти внутреннюю энергию W двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом $V = 2$ л под давлением $p = 150$ кПа.

261. Энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объемом $V = 20$ л, $W = 5$ кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle \upsilon_{кв} \rangle = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу m азота в баллоне и давление p, под которым он находится.

262. Найти среднюю арифметическую $\langle \upsilon \rangle$, среднюю квадратичную $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ и наиболее вероятную $\upsilon_в$ скорости молекул газа, который при давлении $p = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

263. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta\upsilon = 50$ м/с?

264. Обсерватория расположена на высоте $h = 3\,250$ м над уровнем моря. Найти давление p воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 5$ °С. Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль. Давление воздуха на уровне моря $p_0 = 101{,}3$ кПа.

265. На какой высоте h давление воздуха составляет 75 % от давления на уровне моря? Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0$ °С.

266. Найти среднюю длину свободного пробега λ молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}2$ нм.

267. Найти среднее число столкновений Z в единицу времени молекул углекислого газа при температуре $t = 100$ °С, если средняя длина свободного пробега $\lambda = 870$ мкм.

268. Найти среднюю длину свободного пробега λ атомов гелия, если известно, что плотность гелия $\rho = 0{,}021$ кг/м^3.

269. Найти среднюю длину свободного пробега λ молекул водорода при давлении $p = 0{,}133$ Па и температуре $t = 50$ °С.

270. В сферической колбе объемом $V = 1$ л находится азот. При какой плотности ρ азота средняя длина свободного пробега молекул азота больше размеров сосуда?

271. Найти плотность ρ двухатомного кислорода при давлении $P = 50$ атм и температуре $t = 27$ °С.

272. Электрическая газонаполненная лампа накаливания наполнена азотом при давлении в 600 мм рт. ст. Емкость лампы 500 см^3. Какое количество воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой при нормальном атмосферном давлении?

273. Цилиндрическая пипетка длиной l наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. Часть ртути вытекает. Какой длины столбик ртути останется в пипетке? Атмосферное давление равно H.

274. Плотность воздуха при температуре 0 °С и давлении 760 мм рт. ст. равна 0,001293 г/см^3. Определить массу литра воздуха при температуре 27,3 °С и давлении 750 мм рт. ст.

275. Для аргона отношение $\gamma = C_P/C_V = 1{,}68$. Определить давление P_2, получившееся после адиабатического расширения этого газа от объема $V_1 = 1$л до объема $V_2 = 2$ л, если начальное давление $P_1 = 1$ атм.

276. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $PV^2 = \text{const}$? Какова его молярная теплоемкость в этом процессе?

277. Вычислить работу одного моля идеального газа в политропическом процессе, если объем газа изменяется от начального значения V_1 до конечного значения V_2. Рассмотреть частные случаи изотермического и адиабатического процессов.

278. Азот массой $m = 10$ г находится при температуре $T = 290$ К. Определите: 1) среднюю кинетическую энергию одной молекулы азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения всех молекул азота. Газ считайте идеальным.

279. В закрытом сосуде находится смесь азота массой $m_1 = 56$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г. Определите изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на 20 °С.

280. Определите удельные теплоемкости C_v и C_p, если известно, что некоторый газ при нормальных условиях имеет удельный объем $v = 0{,}7$ м^3/кг. Что это за газ?

281. Определите удельные теплоемкости C_v и C_p смеси углекислого газа массой $m_1 = 3$ г и азота массой $m_2 = 4$ г.

282. Определите количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.

283. При адиабатном расширении кислорода ($\nu = 2$ моль), находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в $n = 3$ раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа.

284. Азот массой $m = 1$ кг занимает при температуре $T_1 = 300$ К объем $V_1 = 0{,}5$ м^3. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите: 1) конечный объем газа; 2) его конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа.

285. Смешано $m_1 = 40$ г водорода (H_2) с $m_2 = 32$ г кислорода (O_2). Удельные теплоемкости этих газов соответственно равны: $C_p{}_{H_2} = 14{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) и $C_p{}_{O_2} = 912$ Дж/(кг·К). Определите: а) потерю тепла при охлаждении смеси на $\Delta t = 30$ °С при постоянном объеме; б) удельную теплоемкость смеси C_v.

286. При постоянном давлении нагревают 200 г азота от 20 до 100 °С. Определите: а) количество поглощаемой теплоты; б) прирост внутренней энергии; в) работу, производимую газом.

287. Расширяясь, 1 моль водорода совершил работу, равную 10 Дж. Какое количество теплоты было подведено к газу, если газ расширялся: а) изобарически; б) изотермически?

288. Кислород, занимавший объем 1 л при давлении $12 \cdot 10^5$ Па, адиабатически расширился до объема 10 л. Определите работу расширения.

289. Углекислый газ находится в баллоне емкостью $V = 20{,}5$ л при температуре $t = 0$ °С и давлении $p = 5 \cdot 10^5$ Па. Определите температуру и давление, если газ получит $1{,}25 \cdot 10^4$ Дж теплоты.

290. Горючая смесь в двигателе Дизеля воспламеняется при температуре 800 °С. Начальная температура смеси 70 °С. Во сколько раз нужно уменьшить объем смеси при сжатии, чтобы она воспламенилась? Сжатие считайте адиабатическим, примите $\gamma = 1{,}4$.

291. При политропическом расширении 1 моля идеального одноатомного газа его температура уменьшается на 1 К. Показатель политропы $n = 1{,}5$. Определите: а) молярную теплоемкость газа в этом процессе; б) количество теплоты, отданной или полученной газом; в) работу, совершаемую газом.

292. Одноатомный газ сжимается политропически от начального объема $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м^3 до конечного $V_2 = 10^{-3}$ м^3, а его давление при этом увеличивается от $p_1 = 10^5$ Па до $p_2 = 8 \cdot 10^5$ Па. Начальная температура газа $T = 300$ К. Определите: а) показатель политропы; б) молярную теплоемкость газа при этом процессе; в) изменение внутренней энергии газа; г) какое количество тепла получил или отдал газ.

293. При нагревании некоторой массы газа на $\Delta T = 1$ К давление газа на стенки сосуда изменилось на $\frac{1}{340}$ часть первоначального давления, а объем газа остался неизменным. Найдите начальную температуру газа.

294. При адиабатическом увеличении объема кислорода в 10 раз его внутренняя энергия уменьшилась на 42 кДж. Начальная температура кислорода $T = 280$ К. Найдите массу кислорода.

295. Найти удельную теплоемкость C кислорода для: а) $V = \text{const}$; б) $p = \text{const}$.

296. Удельная теплоемкость некоторого двухатомного газа $C_p = 14{,}7$ кДж/(кг · К). Найти молярную массу μ этого газа.

297. Азот находится в закрытом сосуде объемом $V = 3$ л при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 0{,}3$ МПа. После нагревания давление в сосуде повысилось до $p_2 = 2{,}5$ МПа. Найти температуру t_2 азота после нагревания и количество теплоты Q, сообщенное азоту.

298. Для нагревания некоторой массы газа на $\Delta t_1 = 50$ °С при $p = \text{const}$ необходимо затратить количество теплоты $Q_1 = 670$ Дж. Если эту же массу газа охладить на $\Delta t_2 = 100$ °С при $V = \text{const}$, то выделяется количество теплоты $Q_2 = 1005$ Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

299. Масса $m = 10$ г кислорода находится при давлении $p = 300$ кПа и температуре $t = 10$ °С. После нагревания при $p = \text{const}$ газ занял объем $V = 10$ л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔW внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

300. В закрытом сосуде находится смесь азота массой $m_1 = 20$ г и кислорода массой $m_2 = 32$ г . Найти изменение ΔW внутренней энергии смеси газов при охлаждении ее на $\Delta T = 28$ К.

301. Количество $\nu = 2$ кмоль углекислого газа нагревается при постоянном давлении на $\Delta T = 50$ К. Найти изменение ΔW внутренней энергии газа, работу A расширения газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

302. Работа изотермического расширения массы $m = 10$ г некоторого газа от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$ оказалась равной $A = 575$ Дж. Найти среднюю квадратичную скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ молекул газа при этой температуре.

303. Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л. Найти работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты Q, сообщенное газу.

304. При адиабатическом сжатии количества $\nu = 1$ кмоль двухатомного газа была совершена работа $A = 146$ кДж. На сколько увеличилась температура газа при сжатии?

305. Два различных газа, из которых один одноатомный, а другой двухатомный, находятся при одинаковых температурах и занимают одинаковые объемы. Газы сжимаются адиабатически так, что объем их уменьшается вдвое. Какой из газов нагреется больше и во сколько раз?

306. Вода при соблюдении необходимых предосторожностей может быть переохлаждена до температуры $t = -10$ °С. Какая масса льда m образуется из $M = 1$ кг такой воды, если бросить в нее кусочек льда и тем вызвать замерзание? Теплоемкость переохлажденной воды считать независящей от температуры и равной теплоемкости обычной воды.

307. 1 г водорода, сгорая и превращаясь в воду, выделяет 34 000 кал тепла. Сколько граммов угля надо сжечь для диссоциации 1 г воды, если из выделяемой углем теплоты используется 50 %? Удельная теплота сгорания угля равна 7000 кал/г.

308. Какую скорость υ должна иметь свинцовая пуля, чтобы при ударе о стальную плиту она расплавилась? Температура пули $t_0 = 27$ °С, температура плавления $t_1 = 327$ °С, удельная теплота плавления свинца $q = 5$ кал/г, удельная теплоемкость свинца $C = 0{,}03$ кал/(г·°С).

309. Моль идеального газа изотермически расширяется (или сжимается) от объема V_1 до объема V_2. Определить совершаемую им работу A и количество тепла Q, сообщеного газу.

310. Вычислить молярную теплоемкость идеального газа для процесса, в котором давление P пропорционально объему V. Теплоемкость C_V газа не зависит от температуры.

311. Состояние идеального газа изменяется по политропе $P = kV$. Найти работу, совершаемую молем газа при повышении его температуры от T_1 до T_2.

312. Вычислить работу одного моля идеального газа в политропическом процессе, если объем газа изменяется от начального значения V_1 до конечного значения V_2.

313. Какое количество тепла Q потребуется на нагревание 1 м^3 воздуха от 0 до 1 °С при постоянном объеме и начальном давлении P = 760 мм рт. ст.? Плотность воздуха при нормальных условиях p_0 = 0,00129 г/см^3, C_P = 0,237 кал/(г·°С), $\gamma = C_P/C_v = 1{,}41$.

314. 1 м^3 водорода при 0 °С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легкоскользящим невесомым поршнем. Атмосферное давление 730 мм рт. ст. Какое количество тепла Q потребуется на нагревание водорода до 300 °С?

315. Определить удельную теплоемкость C_v смеси 50 % по весу водорода и гелия, заключенной в объеме V = 1 л при температуре 27 °С и давлении P = 800 мм рт. ст. Молярные теплоемкости водорода H_2 C_{V1} = 5 кал/(моль·°С) и гелия C_{V2} = 3 кал/(моль·°С).

316. При некоторых условиях α % молекул водорода диссоциировано на атомы. Найти молярную теплоемкость C_V этого газа при α = 25. Молярные теплоемкости атомарного водорода C_{V1} = 2,94 кал/(моль·°С), молекулярного водорода C_{V2} = 4,9 кал/(моль·°С).

317. В сосуде емкостью V = 10 л находится кислород O_2 под давлением P_0 = 1 атм. Стенки сосуда могут выдержать давление до P_1 = 10 атм. Какое максимальное количество тепла Q можно сообщить газу?

318. В сосуде находится гелий, который изобарно расширяется. При этом к нему подводится количество теплоты, равное 15 кДж. На сколько изменится внутренняя энергия газа? Какова работа расширения?

319. Какова должна быть степень сжатия воздуха, чтобы его температура возросла с 15 до 700 °С? Сжатие считать адиабатным.

320. Найти коэффициент диффузии D гелия при нормальных условиях.

321. Найти коэффициент диффузии D и вязкость η воздуха при давлении p = 101,3 кПа и температуре t = 10 °С. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм.

322. Коэффициент диффузии и вязкость водорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$ м^2/с и η = 8,5 мкПа·с. Найти число n молекул водорода в единице объема.

323. Определите коэффициент диффузии D кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода примите равным 0,36 нм.

324. Определите массу азота, прошедшего, вследствие диффузии, через площадку 50 см^2 за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м^4. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

325. Определите коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при тех же условиях равен 10 мкПа·с.

326. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда равно 8 мм, а температура 17 °С? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм.

327. Давление разреженного газа в рентгеновской трубке при температуре 17 °С равно 130 мкПа. Можно ли вести разговор о высоком вакууме, если характерный размер l_0 (расстояние между катодом и анодом трубки) составляет 50 мм? Эффективный диаметр молекул воздуха примите равным 0,27 нм.

328. Во сколько раз отличаются наибольшие возможные скорости падения шарика диаметром $d = 0{,}5$ мм в водороде и азоте, если температуры и давления в обеих средах одинаковы?

329. Диск подвешен на упругой нити над другим вращающимся диском на расстоянии $h = 1$ см. Частота вращения нижнего диска 8 об/с, радиусы дисков $R = 10$ см, модуль кручения нити $N = 10^{-5}$ Н·м/рад, коэффициент внутреннего трения воздуха $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н·м$^{-2}$·с. Определите угол поворота верхнего диска. Краевыми эффектами пренебрегите. Движение воздуха между дисками считайте ламинарным.

330. Коэффициент внутреннего трения кислорода при нормальных условиях равен $\eta = 1{,}92 \cdot 10^{-5}$ Н·м$^{-2}$·с. Определите: а) длину свободного пробега молекул; б) кинематическую вязкость; в) эффективный диаметр молекул.

331. Вода в пруду имеет температуру $t = 0$ °С. Температура окружающего воздуха $t_2 = -10$ °С. Какой слой льда образуется за одни сутки, считая с момента начала замерзания воды? Коэффициент теплопроводности льда $\chi = 2{,}51$ Вт/(м·К).

332. Антикатод рентгеновской трубки выполнен в виде медного стержня длиной $l = 25$ см и диаметром $d = 1{,}5$ см. Определите разницу температур между горячим и холодным концом стержня, если через боковую поверхность стержня тепло не проходит, а холодный конец омывается проточной водой. Вода нагревается на 3 °С при расходе $\Delta m = 1$ кг/мин. Коэффициент теплопроводности меди $\chi = 3{,}185 \cdot 10^2$ Вт/(м·К).

333. Средняя длина свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях $\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ м. Определите коэффициенты диффузии, внутреннего трения и теплопроводности.

334. Азот находится при давлении $p = 10^5$ Па и температуре 10 °С. Определите коэффициенты диффузии, внутреннего трения и теплопроводности.

335. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения водорода при некоторых условиях равны соответственно $D = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ м^3/с и $\eta = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$ нс/м^2. Определите: а) число молекул водорода в 1 м^3 при этих условиях; б) коэффициент теплопроводности.

336. Кислород и азот имеют одинаковые температуру и давление. Определите для этих газов: а) отношение их коэффициентов внутреннего трения; б) отношение их кинематических вязкостей; в) отношение коэффициентов теплопроводности.

337. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 2{,}94$ кДж и отдает за один цикл холодильнику количество теплоты $Q_2 = 13{,}4$ кДж. Найти КПД η цикла.

338. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 73{,}5$ кДж. Температура нагревателя $t_1 = 100$ °С, температура холодильника $t_2 = 0$ °С. Найти КПД η цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

339. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80 % количества теплоты, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6{,}28$ кДж. Найти КПД η цикла и работу A, совершаемую за один цикл.

340. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 37$ кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой $t_2 = -10$ °С и передает тепло телу с температурой $t_1 = 17$ °С. Найти КПД η цикла, количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела за один цикл, и количество теплоты Q_1, переданное более горячему телу за один цикл.

341. Найти изменение ΔS энтропии при плавлении массы $m = 1$ кг льда ($t = 0$ °С).

342. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы $m = 6$ г водорода от объема $V_1 = 20$ л под давлением $p_1 = 150$ кПа к объему $V_2 = 60$ л под давлением $p_2 = 100$ кПа.

343. Масса $m = 6{,}6$ г водорода расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом расширении.

344. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы $m = 8$ г гелия от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л.

345. Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы $m = 6$ г водорода от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 50$ кПа.

346. Масса $m = 10{,}5$ г азота изотермически расширяется от объема $V_1 = 2$ л до объема $V_2 = 5$ л. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

347. При нагревании количества $\nu = 1$ кмоль двухатомного газа его термодинамическая температура увеличивается от T_1 до $T_2 = 1{,}5T_1$. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

348. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70 % количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле.

349. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты 5,5 кДж и совершил работу 1,1 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника.

350. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника $T_2 = 300$ К. Работа изотермического расширения газа составляет 2 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику.

351. При нагревании двухатомного идеального газа ($\nu = 2$ моль) его термодинамическая температура увеличилась в $n = 2$ раза. Определите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно.

352. При совершении цикла Карно газ получил от нагревателя 16,77 кДж энергии и совершил 5,59 кДж работы. Во сколько раз температура нагревателя выше температуры холодильника?

353. Два сосуда, емкости которых $V_1 = 1{,}6$ л и $V_2 = 3{,}4$ л, содержат соответственно $m_1 = 14$ г окиси углерода (CO) и $m_2 = 16$ г кислорода (O_2). Температуры газов одинаковы. Сосуды соединяют, и газы перемешиваются. Определите приращение энтропии при этом процессе.

354. Найдите изменение энтропии 1 кг воздуха, если его давление увеличилось от $2 \cdot 10^5$ до 10^6 Па, а температура понизилась от 327 до 127 °С.

355. Макроскопическая система поглощает $\Delta E = 10^{-20}$ Дж энергии. При этом число доступных состояний системы увеличивается на 10 %. Какова была температура этой системы?

356. Углекислый газ массой 6,6 кг при давлении 0,1 МПа занимает объем 3,75 м^3. Определите температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b примите равными соответственно 0,361 Н·м^4/моль^2 и $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

357. Анализируя уравнение состояния реальных газов, определите величины поправок a и b для азота. Критические давление и температура азота соответственно равны 3,39 МПа и 126 К.

358. В сосуде содержится 1 моль газа. Его давление в 20 раз больше критического давления, а объем равен половине критического объема. Определите отношение температуры этого газа к критической температуре.

359. Для аргона критическое давление $p_{кр} = 48 \cdot 10^5$ Па и критическая температура $T_{кр} = -122$ °С. Определите для аргона: а) постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса; б) критический объем 1 моль аргона.

360. При изотермическом расширении 10 г кислорода объем газа увеличивается от 1 до 5 л. Считая газ подчиняющимся уравнению Ван-дер-Ваальса, определите: а) работу внутренних сил при расширении газа; б) приращение энтропии.

361. Каким должен быть наибольший диаметр стальной иголки, чтобы смазанная жиром она могла держаться в горизонтальном положении на поверхности воды?

362. В дне сосуда с ртутью имеется отверстие. Каким может быть наибольший диаметр d отверстия, чтобы ртуть из сосуда не выливалась при высоте столба ртути $h = 3$ см?

363. Капля ртути массой $m = 0{,}5$ г помещена между двумя горизонтальными пластинами. Какую силу F надо приложить к верхней пластине, чтобы эта капля приняла форму круглой лепешки с радиусом $R = 2{,}5$ см? Краевой угол $\varphi = 130°$.

364. Капля воды с массой $m = 0{,}1$ г введена между двумя параллельными горизонтальными пластинами. Какова сила притяжения между пластинами, если они находятся на расстоянии $h = 10^{-4}$ см? Считайте смачивание полным. Температура капли воды $t = 20$ °С.

365. Мыльный пузырь имеет диаметр $d = 0{,}012$ м. Определите: избыточное давление воздуха внутри пузыря; свободную энергию его поверхности; работу, совершаемую при выдувании пузыря, считая процесс изотермическим. Примите коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 0{,}043$ Н/м.

366. Водомерка бегает по поверхности воды. Найти массу m водомерки, если известно, что под каждой из шести лапок насекомого образуется ямка, равная полусфере радиусом $r = 0{,}1$ мм.

367. Какую работу нужно произвести, чтобы каплю масла с массой $m = 1$ г раздробить внутри воды на капельки с диаметром $d = 2 \cdot 10^{-6}$ м, если процесс дробления происходит изотермически? Примите поверхностное натяжение на границе вода – масло $\sigma = 18 \cdot 10^{-3}$ Н/м и плотность масла $\rho = 900$ кг/м^3.

368. В дне стеклянного сосуда площадью $S = 30$ см^2 имеется круглое отверстие диаметром $d = 0{,}5$ мм. В сосуд налита ртуть. Какая масса m ртути останется в сосуде?

369. Найти высоту подъема жидкости между двумя длинными параллельными пластинами, расстояние между которыми равно d.

370. В спирт опущена на ничтожную глубину трубка с диаметром внутреннего канала $d = 0{,}5$ мм. Каков вес P вошедшего в нее спирта?

371. В стеклянный капилляр с внутренним каналом диаметром $d_1 = 2$ мм вставлена стеклянная палочка диаметром $d_2 = 1{,}5$ мм так, что просвет в канале всюду одинаков. Определить высоту капиллярного поднятия воды в канале.

372. Стеклянная капиллярная трубка, диаметр внутреннего канала которой 1,5 мм, а длина 20 см, опускается в горизонтальном положении в ртуть так, что имевшийся в ней воздух полностью остается в ней. Какая будет длина h столбика воздуха в трубке, когда она будет опущена на глубину 10 см? Давление воздуха нормальное.

373. Будет ли плавать на поверхности воды жирная (полностью несмачиваемая водой) платиновая проволока диаметром $d = 1$ мм?

374. Какую силу F надо приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные фотопластинки размером $S = 9 \times 12$ см^2? Толщина водяной прослойки между пластинками $d = 0{,}05$ мм. Смачивание считать полным.

375. Чему равно число атомов в элементарной ячейке простой кубической решетки?

376. Чему равно число атомов в элементарной ячейке гранецентрированной кубической решетки?

377. Чему равно число атомов в элементарной ячейке плотноупакованной гексагональной решетки?

378. Медный стержень зажат между двумя опорами. Его температуру увеличили на 50 °С. Какое напряжение возникает в стержне?

379. Стальной маховик имеет вид массивного кольца с внешним диаметром 40 см и внутренним диаметром 30 см. На какую максимальную скорость вращения он рассчитан? При какой скорости вращения он разорвется на части?

380. Какое давление может выдержать стальной баллон сферической формы, если его внутренний радиус равен R, толщина стенок d? Сделать расчет при $R = 50$ см, $d = 5$ мм.

381. Вычислите плотность кристалла лития. Постоянная кристаллической решетки лития $a = 3{,}53 \cdot 10^{-10}$ м. Структура решетки – объемно-центрированный куб, атомная масса $A = 7$.

382. Определите атомную массу ванадия. Кристалл ванадия – объемно-центрированный куб. Постоянная кристаллической решетки $a = 3{,}04 \cdot 10^{-10}$м, плотность ванадия $\rho = 5{,}96 \cdot 10^3$ кг/м^3.

383. Два бруска разного объема из одного и того же материала, имеющие разную температуру, прикладываются друг к другу гранями, причем более теплый передает некоторое количество тепла другому. Обмен теплотой с окружающими телами отсутствует. Изменяется ли при этом общий объем и общая длина брусков?

384. Можно ли заметить тепловое расширение диаметра латунного цилиндра, если измерение производится микрометром с точностью до 0,01 мм при температурах 5 и 35 °С? При 5 °С измерение дало 20,45 мм.

385. При 0 °С цинковый стержень имеет длину 200 мм, а медный – 201 мм. Поперечные размеры их при 0 °С одинаковы. а) При какой температуре их длины одинаковы? б) При какой температуре их объемы одинаковы?

386. При давлении $1{,}2 \cdot 10^5$ Па 8,8 кг углекислого газа занимают объем 4,2 м^3. Определить температуру газа, пользуясь уравнениями Ван-дер-Ваальса и Клайперона – Менделеева. Сравнить полученные результаты. Поправки a и b для углекислого газа соответственно равны $36{,}4 \cdot 10^4$ Н·м^4/кмоль^2 и 0,043 м^3/кмоль.

387. При какой температуре 1 кмоль аргона будет занимать объем 1 м^3, если давление его равно $30 \cdot 10^6$ Па? Критические величины для аргона $p_{кр} = 48{,}6 \cdot 10^5$ Па, $T_{кр} = 150{,}8$ К. Решить задачу, пользуясь приведенной формой уравнения Ван-дер-Ваальса.

388. Определить давление, при котором должен находиться 1 кмоль азота, чтобы при $T = 310$ К он занимал объем 2,5 м^3. Задачу решить, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенной форме. Критические величины для азота $p_{кр} = 33{,}9 \cdot 10^5$ Па, $T_{кр} = 126{,}1$ К.

389. Какому давлению необходимо подвергнуть углекислый газ при $T = 300$ К, чтобы его плотность оказалась равной $\rho = 500$ г/л? Расчет провести как для идеального газа, так и для Ван-Дер-Ваальсовского.

390. Один моль азота находится в объеме $V = 1$ л. Найти: а) температуру азота, при которой погрешность в давлении, определяемом уравнением состояния идеального газа, составляет $\eta = 10$ % (по сравнению с давлением Ван-Дер-Ваальсовского газа); б) давление газа при этой температуре.

391. Один моль некоторого газа находится в сосуде объемом $V = 0{,}25$ л. При $T_1 = 300$ К давление газа $p_1 = 90$ атм, а при $T_2 = 350$ К давление $p_2 = 110$ атм. Найти постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. Т. 1.– М.: Высшая школа, 1973. – 384 с.

2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высшая школа, 1998. – 542 с.

3. *Жихарева М.Г.* Молекулярная физика и термодинамика. Методические указания к решению задач. – Волжский: ВФ МЭИ (ТУ), 2002. – 32 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Основные единицы СИ

Наименование величины	Единица измерения	Обозначения
длина	метр	м
масса	килограмм	кг
время	секунда	с

Таблица 2

Дополнительные единицы СИ

Наименование величины	Единица измерения	Обозначения
плоский угол	радиан	рад
телесный угол	стерадиан	ср

Таблица 3

Производные единицы Международной системы единиц

Наименование величины	Единицы		Выражение через основные единицы СИ
	наименование	обозначение	
площадь	квадратный метр	$м^2$	$м^2$
объём	кубический метр	$м^3$	$м^3$
частота	герц	Гц	$с^{-1}$
плотность	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	$кг \cdot м^{-3}$
скорость	метр в секунду	м/с	$м \cdot с^{-1}$
угловая скорость	радиан в секунду	рад/с	$рад \cdot с^{-1}$
ускорение	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$	$м \cdot с^{-2}$
сила	ньютон	Н	$кг \cdot м \cdot с^{-1}$
давление	паскаль	Па	$кг \cdot м^{-1} \cdot с^{-2}$
энергия, работа, кол-во теплоты	джоуль	Дж	$кг \cdot м^{-2} \cdot с^{-2}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические рекомендации..... 3
§ 1. Кинематика..... 4
§ 2. Динамика твёрдого тела..... 9
§ 3. Законы сохранения..... 16
§ 4. Механические колебания..... 24
§ 5. Молекулярная физика и термодинамика..... 31
§ 6. Задачи для самостоятельного решения..... 33
Список рекомендуемой литературы 63
Приложение..... 64

Кульков Виктор Геннадьевич
Мельников Валентин Петрович
Кулешина Светлана Васильевна

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие
к выполнению семестрового задания

Редакторы: *Халдеева Г.П., Юрина В.В.*

Подписано в печать 14.10.2008. Формат $60\times90_{1/16}$.
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 4,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 301.

Издатель Филиал ГОУВПО «МЭИ (ТУ)» в г. Волжском
404110, г. Волжский, пр. Ленина, 69.
Отпечатано Филиал ГОУВПО «МЭИ (ТУ)» в г. Волжском
404110, г. Волжский, пр. Ленина, 69.